Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Applicata

Qualche esercizio di Analisi funzionale
A.A. 2011/12, Marco Squassina - Foglio N.5 / Esercizi vari

Pb 1. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato e sia (x_h) una successione di Cauchy che ammette una sotto-successione (x_{h_k}) che converge ad un certo $x \in X$. Provare che allora (x_h) converge ad x.

Pb 2. Si provi che lo spazio $\ell_f(\mathbb{N})$ delle successioni a valori reali che contengono solo un numero finito di termini non nulli risulta denso in $\ell^2(\mathbb{N})$.

Pb 3. Sia X uno spazio di Banach e A, B due sottoinsiemi densi ed aperti in X. Si provi che $A \cap B$ risulta aperto e denso in X.

Pb 4. Siano X, Y spazi di Banach ed A un sottoinsieme denso in X. Sia inoltre $f : A \to Y$ una funzione Lipschitziana. Provare che esiste un'unica estensione continua $f^\sharp : X \to Y$ di f, ossia $f^\sharp|_A = f$.

Pb 5. Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}\sin(\lambda x)}{x+\lambda}$$

appartiene ad $L^2(0, +\infty)$?

Pb 6. Determinare la norma del funzionale lineare $\varphi : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

$$\langle \varphi, e_j \rangle = \frac{(-1)^j}{j!}, \qquad \forall j \geq 1.$$

dove $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, 1 al j-esimo posto.

Pb 7. Data la successione di funzionali lineari $\varphi_n : \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

$$\langle \varphi_n, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j+1} x_j, \qquad \forall n \geq 1.$$

si dica se la successione numerica $(\|\varphi_n\|)$ converge e in caso affermativo se ne calcoli il limite.

Pb 8. Si discuta la limitatezza e l'eventuale compattezza di $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ definito ponendo

$$(T(x))_j := \alpha_j x_j + x_{j+1}$$

essendo (α_j) una successione assegnata.

Pb 9. Supponiamo che $(f_n) \subset C_c^0(\Omega)$ con Ω dominio regolare di $\mathbb{R}^N$. Supponiamo che (f_n) sia di Cauchy rispetto alla norma del sup. Provare che (f_n) converge ad una $f \in C^0(\overline{\Omega})$ nulla su $\partial\Omega$.

Verona, 31 gennaio 2012