

EX3

Calcolare, se $\exists$, $\int_3^4 (2x-2) \ln(x-2) dx$

Ris

 $f(x) = (2x-2) \ln(x-2)$ è definita e continua in $(2, +\infty)$

perché è prodotto di composte di funzioni continue.

 f è continua in $[3, 4] \Rightarrow \exists \int_3^4 f(x) dx$ $\int (2x-2) \ln(x-2) dx =$ per parti

$$\int f'g = fg - \int fg' \quad \text{ove} \quad f' = (2x-2) \quad g = \ln(x-2)$$

$$f = x^2 - 2x \quad g' = \frac{1}{x-2}$$

$$\int (2x-2) \ln(x-2) dx = (x^2 - 2x) \ln(x-2) - \int (x^2 - 2x) \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= (x^2 - 2x) \ln(x-2) - \int x \frac{x-2}{x-2} dx = (x^2 - 2x) \ln(x-2) - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int_3^4 (2x-2) \ln(x-2) dx = \left[(x^2 - 2x) \ln(x-2) - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 =$$

$$= 8 \ln 2 - 8 - \left(3 \ln 1 - \frac{9}{2} \right) = 8 \ln 2 - 8 - \frac{9}{2} = 8 \ln 2 - \frac{25}{2}$$

Condizioni sufficienti di integrabilità secondo Riemann

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$1) \text{ se } f \text{ è monotona in } [a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

$$2) \text{ se } f \text{ è continua in } [a, b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$$

$$3) \text{ se } f \text{ è limitata in } [a, b] \text{ e } f \text{ è continua in } [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \text{ con } x_1, \dots, x_n \in [a, b] \\ \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx.$$