Esercizi sullo studio completo di una funzione

1. *Disegnare il grafico delle funzioni date, utilizzando ogni informazione utile che si può ricavare dalla funzione e dalle sue derivate prima e seconda.*
   a. $y = x(x^2 - 1)^2$
      i. Dominio:
         $\mathcal{D}: \mathcal{R}$
         Visto che è un polinomio
      ii. Simmetrie e Periodicità[1]
         $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funzione dispari
      iii. Positività
         $y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
         $y < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq \pm 1$
      iv. Intersezioni assi
         $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
         $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \wedge x = \pm 1 \end{cases}$
      v. Asintoti verticali[2]: non ci sono poiché il dominio è $\mathcal{R}$;
      vi. Asintoti orizzontali[3]:
         $\lim_{x \to +\infty} y = \pm\infty$ solo a $+\infty$ per ragioni di simmetria
      vii. Asintoti obliqui[4] non ci sono, infatti:
         $\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \infty$
      viii. Monotonia, massimi e minimi[5]:

---

[1] La funzione è **pari**, ovvero simmetrica rispetto all'asse delle ordinate se $f(-x) = f(x)$, mentre è **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ e la funzione è simmetrica rispetto all'origine, mentre è **periodica** di periodo T se $f(x) = f(x + T)$.

[2] Per trovare gli **asintoti verticali** dovremo calcolare il limite della funzione agli estremi del dominio in cui la funzione non è definita. Supponendo che nel punto $x = c$ la funzione non sia definita dovremo calcolare: $\lim_{x \to c} f(x)$, se il risultato è infinito allora la retta $x = c$ sarà l'asintoto verticale. E' utile calcolare esattamente come la funzione arriva all'infinito calcolando sia il limite destro che il limite sinistro per trovare il segno dell'infinito, magari col teorema della permanenza del segno.

[3] Per trovare gli **asintoti orizzontali** si calcola il limite all'infinito della funzione, e se si trova un valore finito: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ allora $y = l$ sarà l'asintoto orizzontale. Naturalmente per calcolare la posizione della funzione rispetto all'asintoto, si fa l'intersezione tra funzione e retta.

[4] Si procede al calcolo degli **asintoti obliqui** se $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. L'asintoto è una retta del tipo: $y = mx + q$ dove $m = \lim_{x \to \infty} f(x) \cdot \frac{1}{x}$ è una quantità finita non nulla, e $q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - m \cdot x]$ una quantità finita.

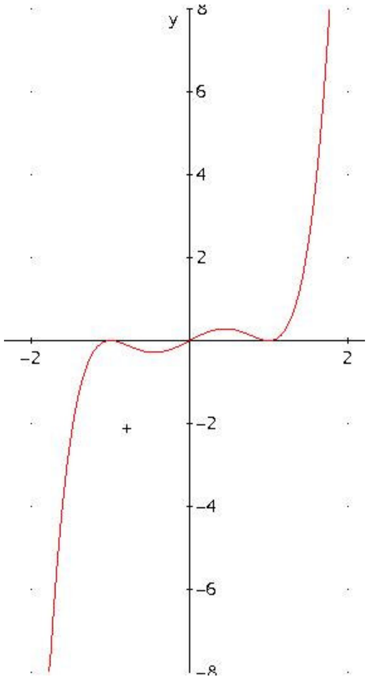
[5] Chiameremo **punti angolosi** quei punti di funzioni continue in cui la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra: cioè la tangente da destra è diversa dalla tangente da sinistra. Tra i punti angolosi distinguiamo le *cuspidi* ove le tangenti destre e sinistre hanno coefficiente angolare una più e l'altra meno infinito. Per il calcolo della retta tangente, si utilizza la seguente regola: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y' = (x^2 - 1)(5x^2 - 1)$

ix. Concavità e flessi[6]:

$y'' = 4x(5x^2 - 3)$

x. Grafico della funzione



b. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

i. Dominio:

$\mathcal{D}: \mathcal{R} - \{-1\}$

Visto che è una funzione fratta

ii. Simmetrie e Periodicità

La funzione non ha particolari simmetrie, e non è periodica

iii. Positività

$y > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$y < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

iv. Intersezioni assi

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

v. Asintoti verticali:

$\lim_{x \to -1^{\pm}} y = \mp\infty$ quindi *x=-1* è asintoto verticale

vi. Asintoti orizzontali:

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$ quindi y=1 è asintoto orizzontale

vii. Asintoti obliqui non ci sono poiché ci sono quelli orizzontali

---

[6] Il **flesso** è un punto dove la curva cambia di concavità. Possiamo distinguere fra *flessi ascendenti* (dove la funzione è crescente) e *flessi discendenti* (con funzione decrescente). Diremo che un flesso è *orizzontale* quando la tangente di flesso è orizzontale.

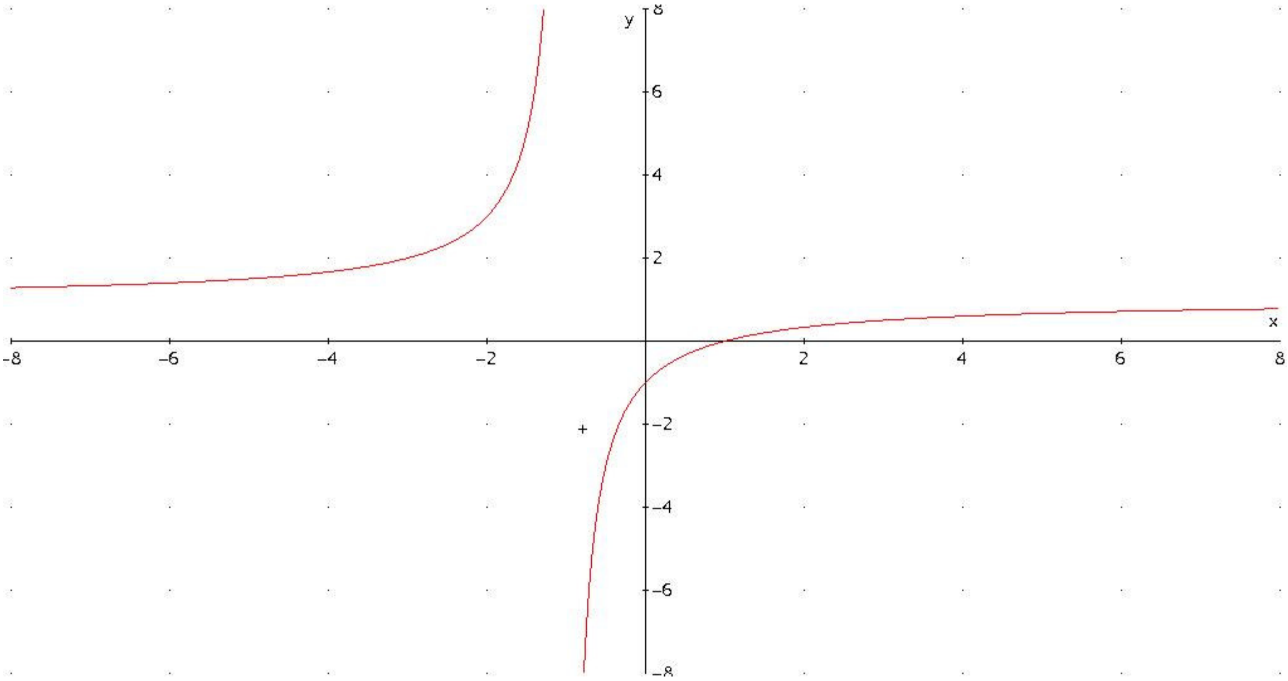
viii. Monotonia, massimi e minimi:

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ix. Concavità e flessi:

$$y'' = -\frac{4}{(x+1)^3}$$

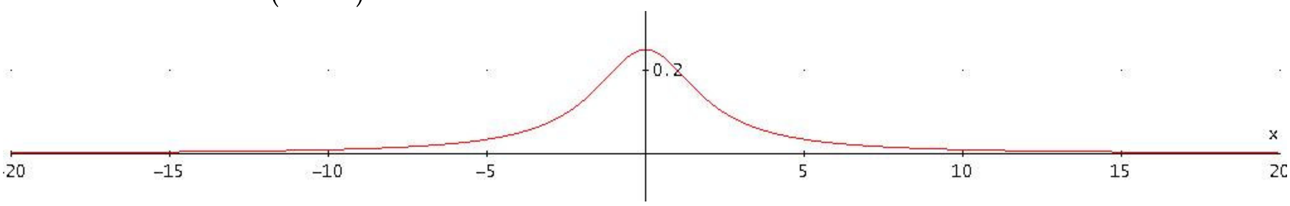
x. Grafico della funzione



c. $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$$

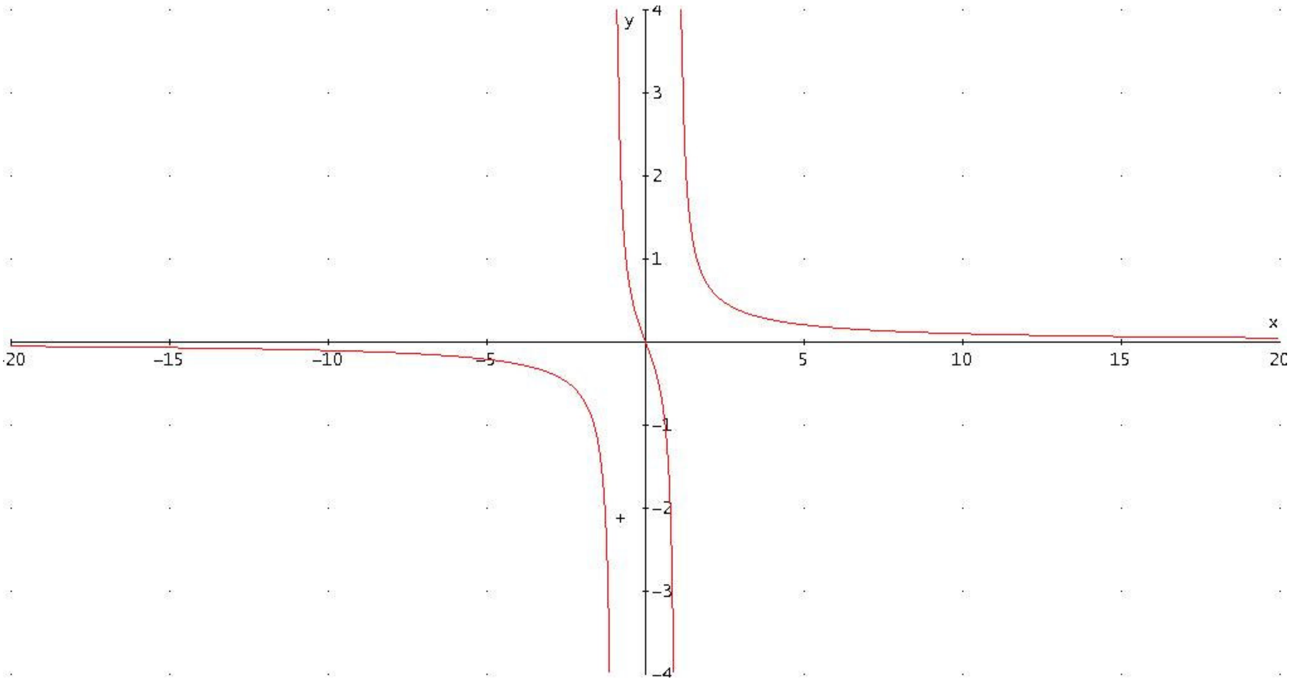
$$y'' = \frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$



d. $y = \dfrac{x}{x^2-1}$

$$y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$



e. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

i. Dominio:

$$\mathcal{D}: \mathcal{R} - \{\pm 1\}$$

Visto che è una funzione fratta

ii. Simmetrie e Periodicità

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la funzione é dispari

iii. Positività

$y > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$

$y < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$

iv. Intersezioni assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

v. Asintoti verticali:

$\lim\limits_{x \to \pm 1^{\pm}} y = \infty$ quindi $x = \pm 1$ sono asintoti verticali

vi. Asintoti orizzontali non ci sono

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \infty$ poiché il grado del numeratore è maggiore del denominatore

vii. Asintoti obliqui:

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \\ q &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x \text{ è l'asintoto obliquo}$$

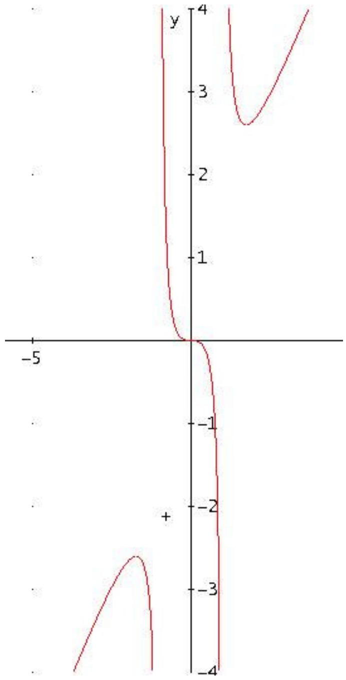
viii. Monotonia, massimi e minimi:

$$y' = \frac{x^2 (x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

ix. Concavità e flessi:

$$y''=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

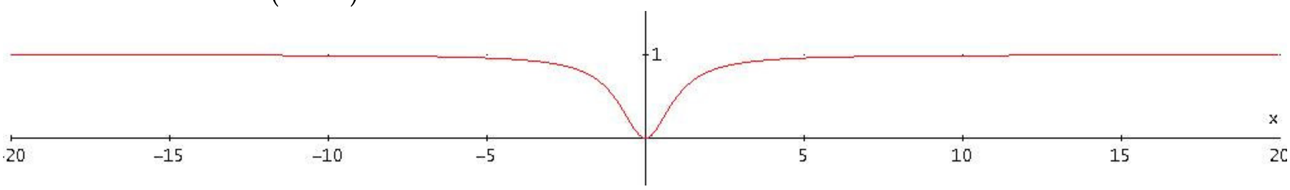
x. Grafico della funzione



f. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$y'=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

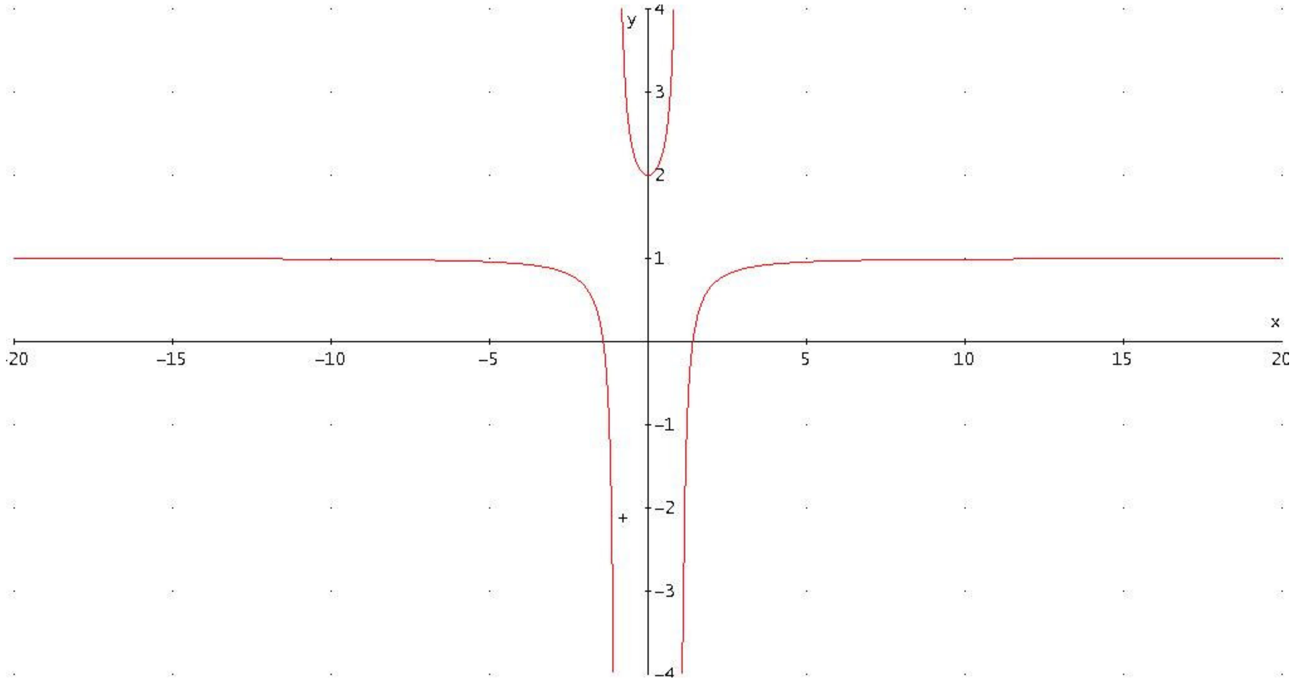
$$y''=\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$



g. $y=\dfrac{x^2-2}{x^2-1}$

$$y'=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

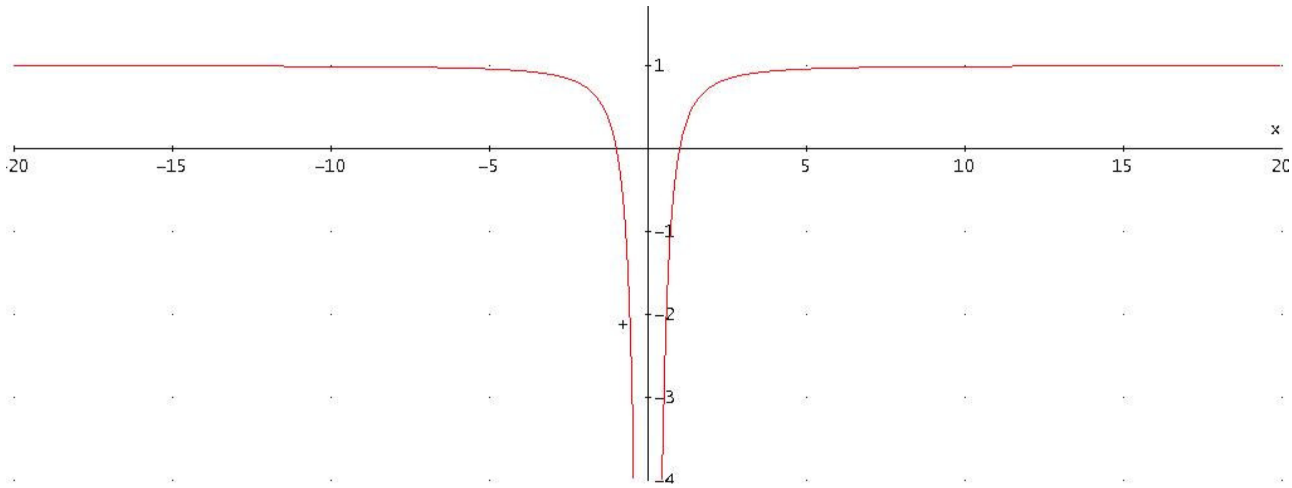
$$y''=\frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3}$$



h. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = \dfrac{2}{x^3}$

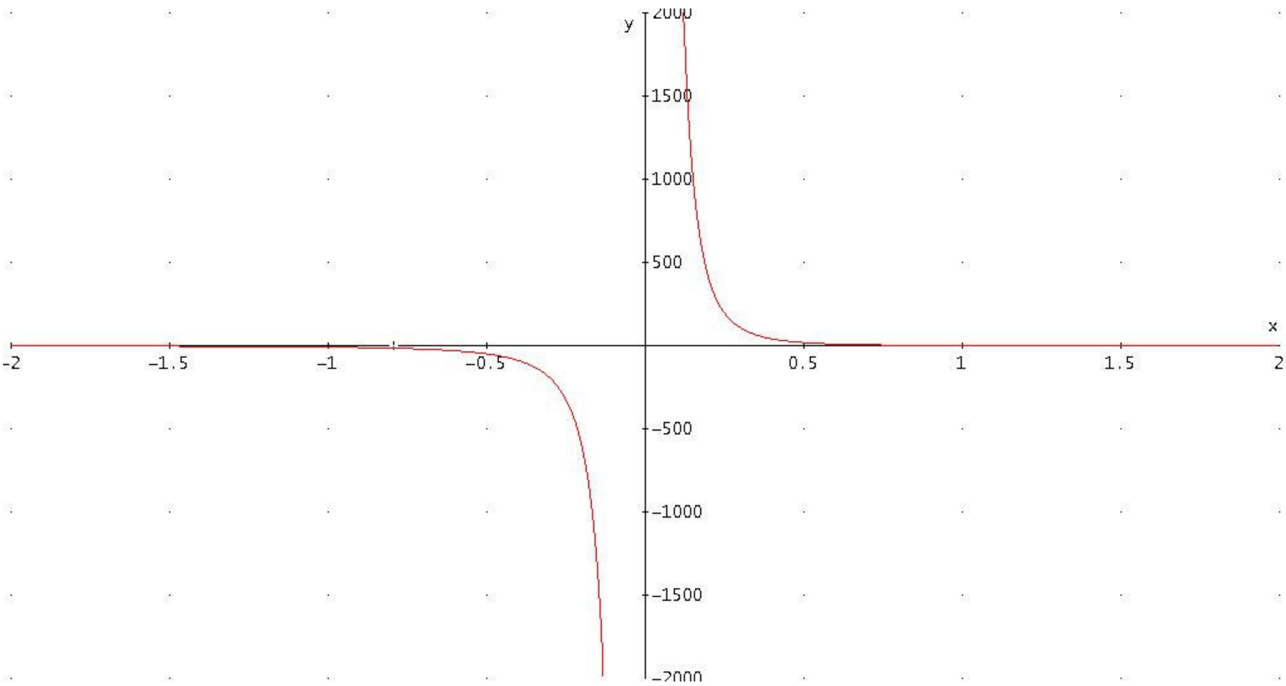
$y'' = -\dfrac{6}{x^4}$



i. $y = \dfrac{(2-x)^2}{x^3}$

$y' = \dfrac{(2-x)(x-6)}{x^4}$

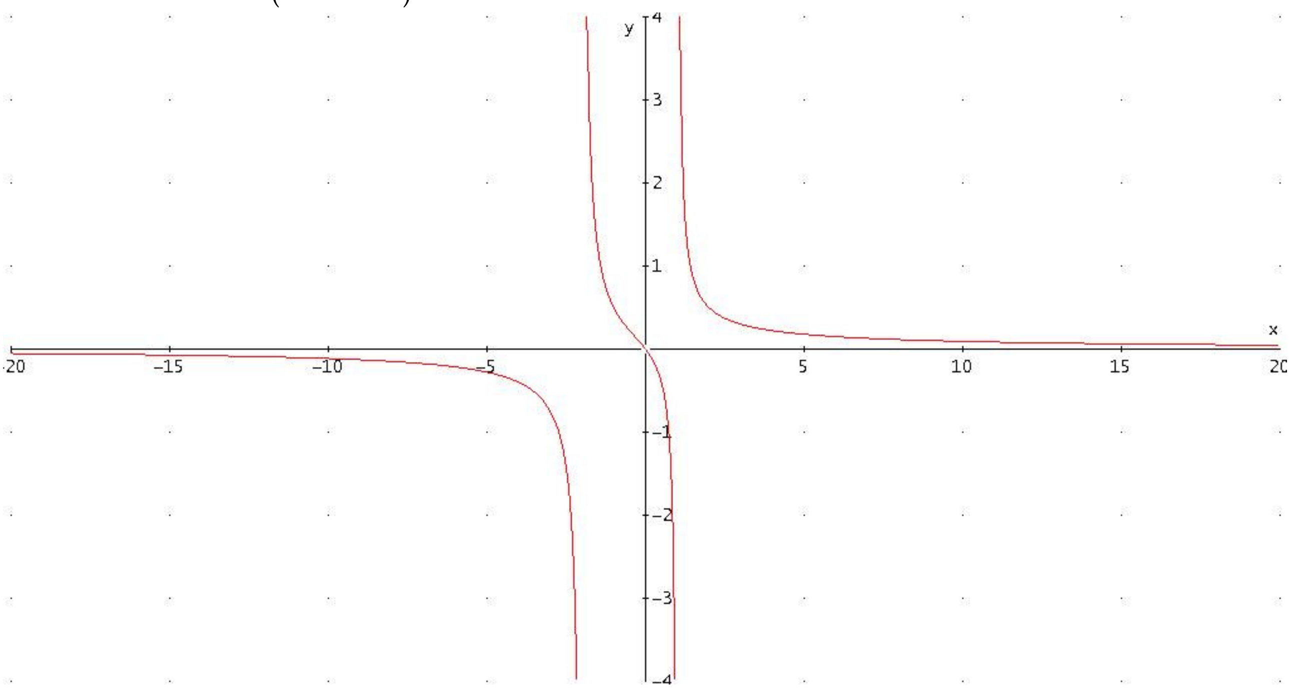
$y'' = \dfrac{2(x^2 - 12x + 24)}{x^5}$



j. $y = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

$y' = -\dfrac{x^2 + 2}{\left(x^2 + x - 2\right)^2}$

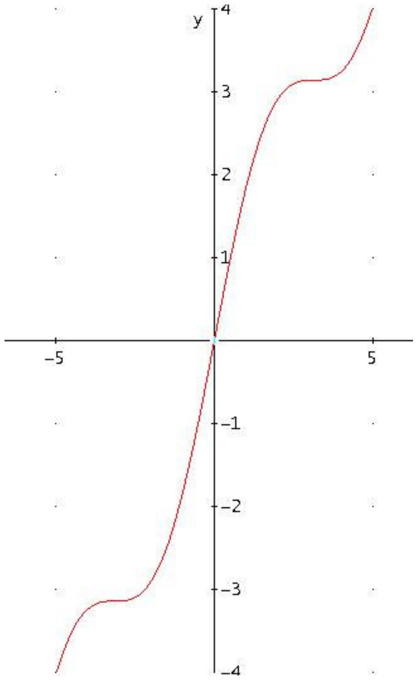
$y'' = \dfrac{2\left(x^3 + 6x + 2\right)}{\left(x^2 + x - 2\right)^3}$



k. $y = x + \sin x$

$y' = \cos x + 1$

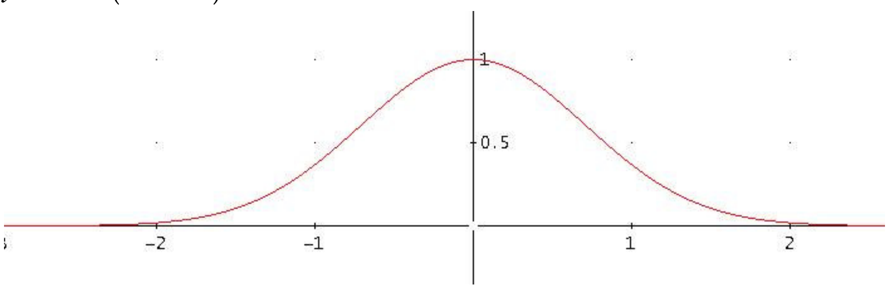
$y'' = -\sin x$



l. $y = e^{-x^2}$

$y' = -2xe^{-x^2}$

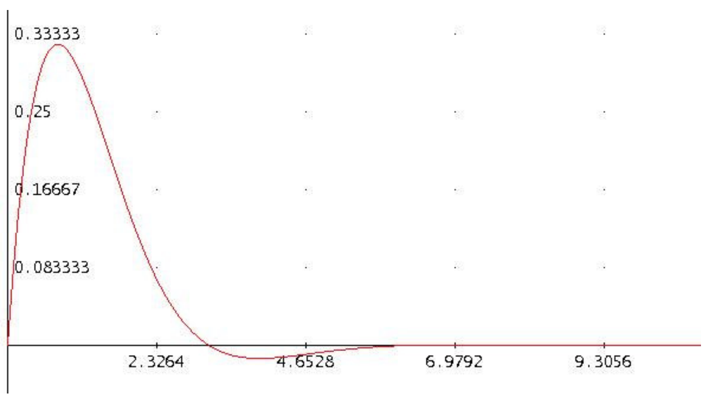
$y'' = e^{-x^2}\left(4x^2 - 2\right)$



m. $y = e^{-x}\sin x \quad (\mathrm{x} \geq 0)$

$y' = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

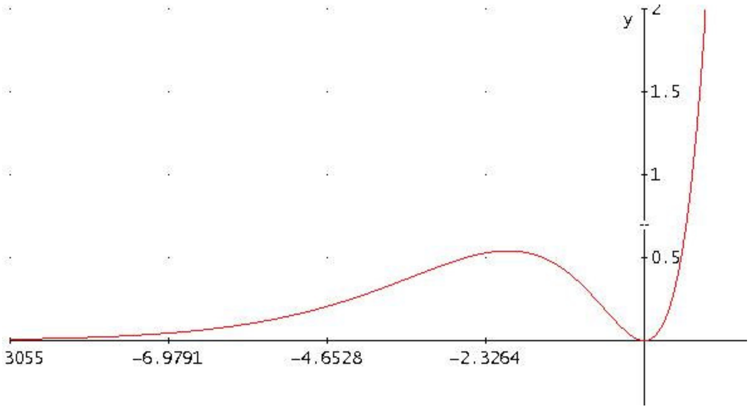
$y'' = -2e^{-x}\cos x$



n. $y = x^2 e^x$

$y' = e^x\left(x^2 + 2x\right)$

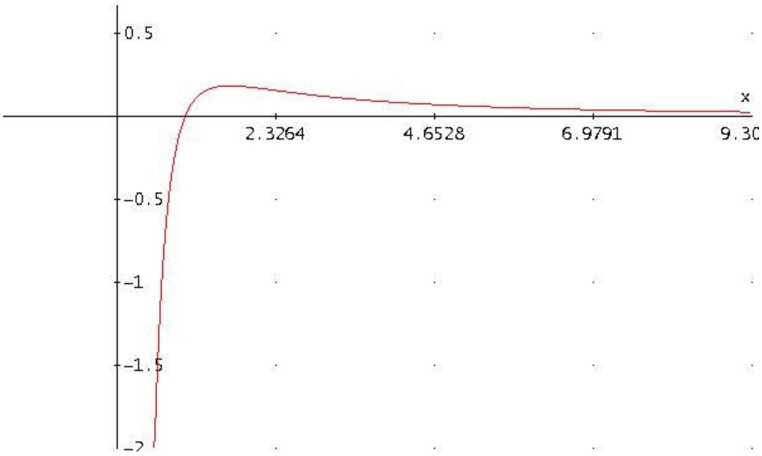
$y'' = e^x\left(x^2 + 4x + 2\right)$



o. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ $\mathcal{D}$: $x > 0$ perché c'è un logaritmo ed una fratta

$y' = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6\ln x - 5}{x^4}$



p. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$y' = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

$y'' = -\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$