Dim. Supponiamo che x_n sia vicino al punto fisso $\bar{x}$ in modo da poter usare lo sviluppo in serie di Taylor:

$$x_{n+1} = g(x_n) \underset{\text{Taylor}}{\overset{\uparrow}{=}} g(\bar{x}) + \cancel{g'(\bar{x})(x_n-\bar{x})} + \cancel{\frac{g^{(2)}(\bar{x})}{2!}(x_n-\bar{x})^2} + \dots$$

$$\cancel{\dots} + \cancel{\frac{g^{(r-1)}(\bar{x})}{(r-1)!}(x_n-\bar{x})^{r-1}} + \frac{g^{(r)}(\bar{x})}{r!}(x_n-\bar{x})^r + \cancel{+\, o\left((x_n-\bar{x})^2\right)}$$

Allora

$$x_{n+1} - \bar{x} = \frac{g^{(r)}(\bar{x})}{r!}(x_n-\bar{x})^r + o\left((x_n-\bar{x})^r\right)$$

$$= (x_n-\bar{x})^r \left[\frac{g^{(r)}(\bar{x})}{r!} + \frac{o\left((x_n-\bar{x})^r\right)}{(x_n-\bar{x})^r}\right]$$

per cui è (ricordiamo che $\epsilon_n = \bar{x} - x_n$)

$$\frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^r} = \left|\frac{g^{(r)}(\bar{x})}{r!} + \frac{o\left((x_n-\bar{x})^r\right)}{(x_n-\bar{x})^r}\right|$$

e passando al limite per $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^r} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{g^{(r)}(\bar{x})}{r!} + \underbrace{\frac{o\left((x_n-\bar{x})^r\right)}{(x_n-\bar{x})^r}}_{\to 0}\right|$$

$$= \frac{|g^{(r)}(\bar{x})|}{r!}$$

OSSERVAZIONE Il metodo di Newton può essere visto come metodo di punto fisso.

Ricordiamo che

$f(x_n)$

Ricordiamo che

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots}$$

che può essere visto come metodo di punto fisso con

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}} \Longrightarrow x_{n+1} = g(x_n)$$

Vediamo l'ordine e la costante asintotica dell'errore del metodo di Newton assumendo che sia $f'(\bar{x}) \neq 0$. Usiamo i teoremi sul punto fisso.

$$g'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)' = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{\cancel{[f'(x)]^2} - \cancel{[f'(x)]^2} + f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Quindi è

$$g'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x})\, f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2} = \frac{0\cdot f''(\bar{x})}{[f'(\bar{x})]^2} = 0$$

Procediamo con $g''(x)$:

$$g''(x) = \frac{\{f'(x)\cdot f''(x) + f(x)\cdot f'''(x)\}\cdot [f'(x)]^2 - f(x)\cdot f''(x)\cdot 2f'(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^4}$$

La valuto in $\bar{x}$ ho

$$g''(\bar{x}) = \frac{\{f'(\bar{x})\cdot f''(\bar{x}) + \cancel{f(\bar{x})\cdot f'''(\bar{x})}\}\cdot [f'(\bar{x})]^2 - \cancel{f(\bar{x})\cdot f''(\bar{x})\cdot 2f'(\bar{x})\cdot f''(\bar{x})}}{[f'(\bar{x})]^4}$$

$$= \frac{f'(\bar{x})\cdot f''(\bar{x})\cdot [f'(\bar{x})]^2}{\quad} = \frac{f''(\bar{x})}{\quad}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{f'(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x}) \cdot [f'(\bar{x})]}{[f'(\bar{x})]^4} = \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

Se $f''(\bar{x}) \neq 0$ allora l'ordine di Newton è $r = 2$ con costante asintotica dell'errore

$$M = \frac{|g''(\bar{x})|}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right|$$

che è quanto detto per il metodo di Newton.

Se $f''(\bar{x}) = 0$ l'ordine di Newton è $r > 2$.

ESERCIZIO Consideriamo l'iterazione di punto fisso

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

che nasce dall'equazione $x = \sqrt{x}$ (e quindi, $g(x) = \sqrt{x}$).

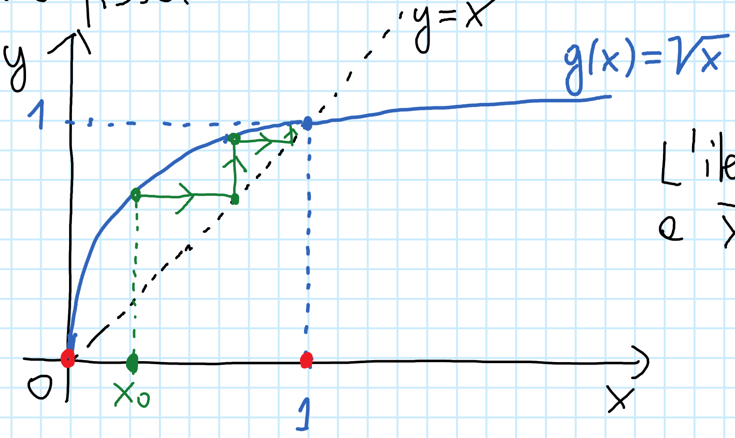
a) Quali sono i punti fissi del metodo di punto fisso dato?

Si trovano risolvendo l'equazione

$$\bar{x} = g(\bar{x}) \iff \bar{x} = \sqrt{\bar{x}} \iff \bar{x}^2 = \bar{x} \iff$$

$$\bar{x}_1 = 0 \quad \text{o} \quad \bar{x}_2 = 1.$$

b) Sia $x_0 \in (0, 1)$. Dire a quale $\bar{x}$ converge l'iterazione di punto fisso.



L'iterazione converge a $\bar{x}_2 = 1$.

c) Determinare l'ordine di convergenza dell'iterazione

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n} \\ x_0 \in (0, 1) \end{cases}$$

L'iterazione converge a $\bar{x}_2 = 1$. Perciò, valuto $g'(\bar{x}_2)$.

È

$$g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(\bar{x}_2) = \frac{1}{2\sqrt{\bar{x}_2}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Poiché $g'(\bar{x}_2) \neq 0$, l'ordine di convergenza è $r = 1$ con costante asintotica dell'errore $M = |g'(\bar{x}_2)| = \frac{1}{2}$.

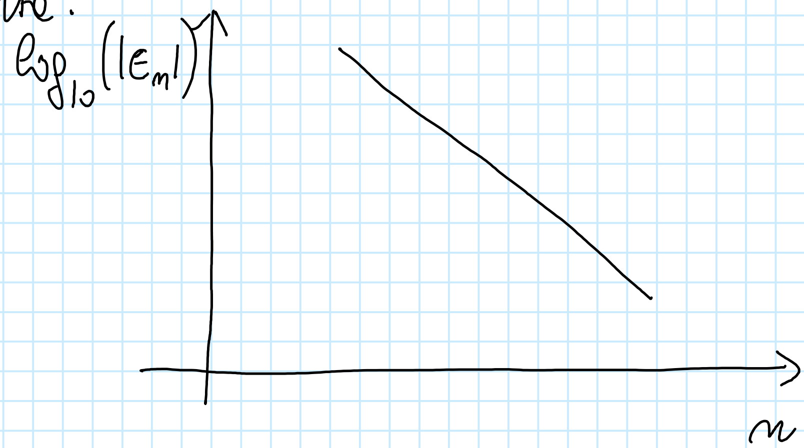
Perciò, almeno per n abbastanza grandi (ossia, x_n vicino a $\bar{x}_2$) risulta

$$\frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow |\epsilon_{n+1}| \approx \frac{1}{2} |\epsilon_n|$$

l'errore dimezza ad ogni passo.

d) Qual è l'andamento qualitativo di $\log_{10}(|\epsilon_n|)$ in funzione di n?

Dato che è un metodo di ordine 1, mi aspetto una retta:

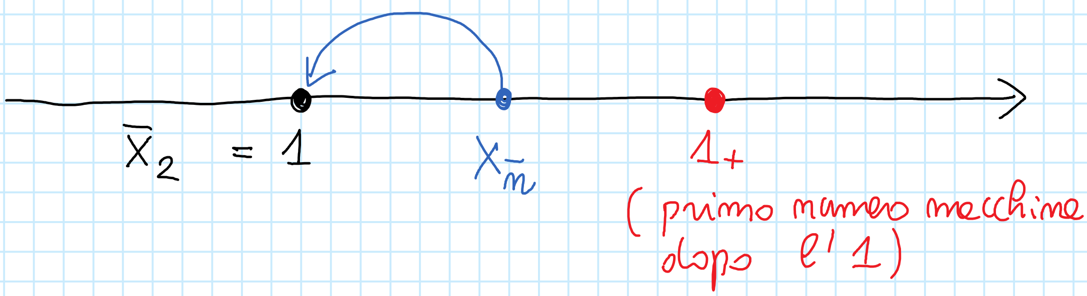


e) Calcoliamo le prime tre iterazioni del metodo partendo da $x_0 = 4$ (dimostrare, graficamente, che x_n converge a $\bar{x}_2$).

$x_0 = 4$

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{4} = 2$$
$$x_2 = g(x_1) = \sqrt{x_1} = \sqrt{2} = 1,414$$
$$x_3 = g(x_2) = \sqrt{x_2} = \sqrt{1,414} = 1,189$$

f) Supponendo di lavorare con un certo sistema $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ ad esempio quello del Matlab che ha $\beta = 2$, $t = 52$.
Esiste un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\epsilon_{\bar{n}} = 0$? Perché?



RICHIAMI DI ALGEBRA

VETTORI E LORO NORME:

$\mathbb{R}^n$ = spazio vettoriale dei vettori COLONNA di n componenti.

Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ si dice norma se

1. (a) $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

   (b) $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$.

2. $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{x}\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

3. $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Useremo le seguenti norme

(•) $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (NORMA UNO)

(•) $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (NORMA DUE o EUCLIDEA)

(c) $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} (|x_i|)$ (NORMA INFINITO O DEL MASSIMO)

ESEMPIO. Sia $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. È

$$\|\underline{x}\|_1 = |1| + |2| + |-2| = 5$$

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max(|1|, |2|, |-2|) = 2.$$

MATRICI

$\mathbb{R}^{m \times n}$: spazio vettoriale delle matrici a m RIGHE e n COLONNE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

La matrice di $\mathbb{R}^{m \times n}$ con tutti zeri è detta MATRICE NULLA e viene indicata con O :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è la matrice nulla di $\mathbb{R}^{3 \times 2}$

Se $m = n$ la matrice è detta QUADRATA di ORDINE n.

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ è detta trasposta di A ed ha le righe e le colonne di A scambiate :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = (1 \;\; 2 \;\; 3) \Longrightarrow \underline{x}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \underline{x}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

VEDIAMO ALCUNI RICHIAMI SULLE MATRICI QUADRATE

- A è simmetrica $\iff$ $A^T = A$
- A è invertibile $\iff$ esiste una matrice B tale che

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

dove I_n è la matrice identità di ordine n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice B è indicata con A^{-1}.
Valgono le proprietà

i) A invertibile $\iff |A| \neq 0$

ii) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

iii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iv) i vettori che formano le colonne di A sono linearmente indipendenti.

v) $A^{-n} \underset{\text{def}}{=} (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

- Il vettore $\underline{x} \neq 0$ è autovettore di A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, detto autovalore associato, tale che

$$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$$

L'insieme degli autovalori è soluzione dell'equazione algebrica (cioè polinomio)

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n| = 0$$

Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_A(\lambda)$ ha grado n e quindi ha n autovalori nel campo complesso, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (eventualmente, alcuni coincidenti).

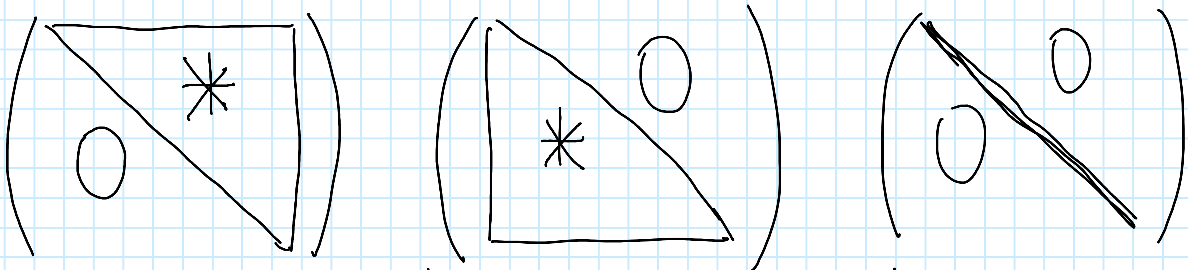
Si chiama SPETTRO di A l'insieme degli autovalori di A:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

Si chiama RAGGIO SPETTRALE di A il numero

$$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| \rightarrow \text{modulo di } \lambda_i$$

Ricordiamo che le matrici seguenti



triangolare alta: TUTTI gli elementi sotto la diagonale sono nulli

triangolare BASSA: TUTTI gli elementi sopra la diagonale sono nulli

diagonale: TUTTI gli elementi fuori della diagonale sono nulli

gli autovalori sono gli elementi della diagonale.

ESEMPIO. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Triangolare alta

$$\sigma(A) = \{1, 2, -1\}$$

$$\rho(A) = \max\{|1|, |2|, |-1|\} = 2$$

Definiamo la **NORMA DI MATRICE**

Sia

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

La funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to [0, +\infty)$ è una norma di matrice se

1) (a) $\|A\| \geq 0$

   (b) $\|A\| = 0 \iff A = 0$

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

In aggiunta si richiede

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Una norma di matrice si dice **CONSISTENTE** con la norma di vettore $\|\cdot\|_v$ se

$$\|A \underline{x}\|_v \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|_v \quad , \quad \forall A \quad , \quad \forall \underline{x}$$