Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Applicata

Qualche esercizio di Analisi funzionale
A.A. 2011/12, Marco Squassina - Foglio N.1 / Spazi L^p

Problema 1. Siano $p > 1$, E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ di misura di Lebesgue finita, $f_n : E \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni misurabili limitata in $L^p(E)$ che converge puntualmente ad una funzione $f : E \to \mathbb{R}$. Dimostrare che (f_n) converge ad f in $L^q(E)$ per ogni $q \in (1, p)$.

Problema 2. Siano $p, q \geq 1$, E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ misurabile e $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile nel primo argomento e continua nel secondo argomento tale che

$$|g(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}, \qquad \text{per q.o. } x \in E \text{ e } s \in \mathbb{R}.$$

dove $a \in L^q(E)$ e $b > 0$. Dimostrare che l'applicazione

$$L^p(E) \to L^q(E), \qquad u \mapsto g(x,u),$$

è continua.

Problema 3. Siano $p > 1$ e $f \in L^p(0, +\infty)$ e si ponga per ogni $x > 0$

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(\tau)\, d\tau.$$

Si mostri che $F \in L^p(0, +\infty)$ e che $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

Verona, 3 novembre 2011