

Opzioni PRE APPELLO:

- (1) 26/5 ore 16:30 - 18:30 aula D (max 80 persone)
- (2) 26/5, DUE TURNI (14:30 → 16:30, 16:30 → 18:30)
ore di lezione, aula B
- (3) ???

DUE SIMULAZIONI DISPONIBILI DAL 9/5.

INFORMAZIONI ESAME

- (*) Si può partecipare a TUTTI gli appelli. Resta valido l'ultimo scritto **CONSEGNA TO**.
- (*) Si può portare il
 - LIBRO ADOTTATO
 - FORMULARIO in foglio A4
 - calcolatrice

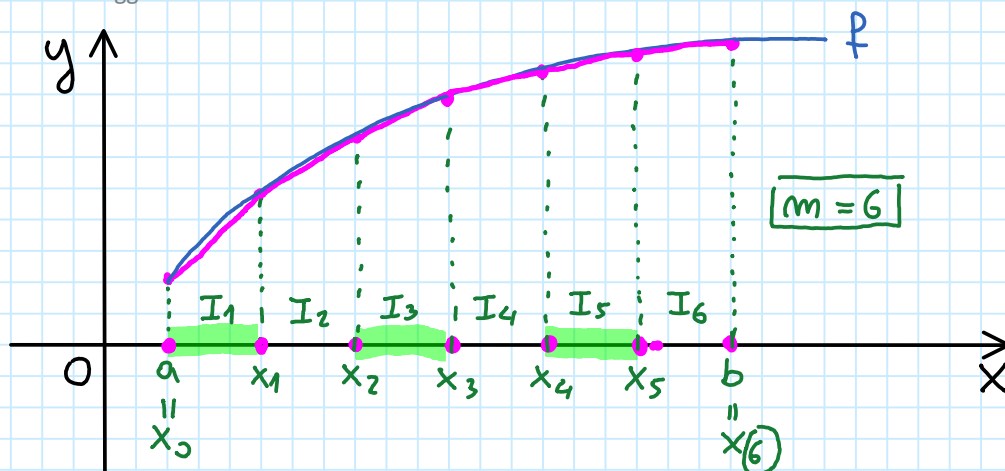
FORMULA DEI TRAPEZI COMPOSTA

Le formule dei trapezi viste NON permette il controllo dell'errore $E_T = I - I_T$.

Noi vogliamo, invece, una relazione che permetta di poter ridurre l'errore tanto quanto vogliamo, ossia voglio poterlo controllare.

L'idea è la seguente:

dividiamo l'intervallo di integrazione $[a, b]$ in m sottointervalli e a ciascuno di essi applichiamo la formula di integrazione dei trapezi.



Considera, anche se non è obbligatorio, intervalli della STESSA ampiezza

$$h = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$= \frac{b-a}{m}$$

Abbiamo

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\overset{h}{x_i - x_{i-1}}}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{(\overset{h}{x_i - x_{i-1}})^3}{12} f''(\xi_i) \right\}$$

$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$

$$= \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^m f''(\xi_i)$$

$$= I_{T,c}^{(m)} + E_{T,c}^{(m)}$$

Esprimiamo meglio $I_{T,c}^{(m)}$:

$$I_{T,c}^{(m)} = \frac{h}{2} \left\{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + [f(x_{m-2}) + f(x_{m-1})] + [f(x_{m-1}) + f(x_m)] \right\}$$

$$= \frac{h}{2} \left\{ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right\}$$

molte
intorni

Esprimo meglio $E_{T,c}^{(m)}$:

$$E_{T,c}^{(m)} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^m f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12} m \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^m f''(\xi_i)}{m}}_{(*)}$$

Suppongo che $f''(x)$ sia CONTINUA in $[a, b]$. Ne segue, per Weierstrass, che f'' ha massimo e minimo in $[a, b]$:

$$\alpha \leq f''(x) \leq \beta \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\text{con } \alpha = \min_{x \in [a, b]} f''(x), \quad \beta = \max_{x \in [a, b]} f''(x)$$

Periò ho

$$\alpha \leq f''(\xi_i) \leq \beta, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{perché } \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Allora

$$\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^m \alpha}{m}}_{=m\alpha} \leq \frac{\sum_{i=1}^m f''(\xi_i)}{m} \leq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^m \beta}{m}}_{=m\beta}$$

$$\alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^m f''(\xi_i)}{m} \leq \beta$$

Ma $f''(x)$ è continua in $[a, b]$ per cui (teorema di tutti i valori) assume, in $[a, b]$, tutti i valori compresi tra α e β .

$\Rightarrow$ esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f''(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^m f''(\xi_i)}{m}$$

Sostituendo in $(*)$ abbiamo

$$E_{T,c}^{(m)} = -\frac{h^3}{12} m f''(\xi) \quad \text{con } \xi \in (a, b) \text{ (NON NOB!)}$$

$$\begin{aligned}
 E_{T,c}^{(m)} &= - \frac{h^3}{12} \textcolor{red}{m} f''(\xi) \quad \text{con } \xi \in (a,b) \text{ (NON noto!)} \\
 &= - \frac{\left(\frac{b-a}{m}\right)^3}{12} m f''(\xi) \\
 &= - \frac{(b-a)^3}{12 m^2} f''(\xi) \quad (\text{ERRORE})
 \end{aligned}$$

Osservazioni

(1) La formula (ERRORE) restituisce quella nota (dei trapezi) per $m=1$.

(2) La formula dice che l'errore cala al crescere di m , come l'intuizione suggerisce perché se I_i è piccolo non è

$$f(x) \approx \text{retta} \quad x \in I_i$$

e quindi le formule dei trapezi applicate ad ogni I_i funzionano bene.

(3) La formula PERMETTE IL CONTROLLO DELL'ERRORE.

Poniamo $M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Allora

$$\begin{aligned}
 |E_{T,c}^{(m)}| &= \left| - \frac{(b-a)^3}{12 m^2} f''(\xi) \right| = \frac{(b-a)^3}{12 m^2} |f''(\xi)| \leq \\
 &\leq \frac{(b-a)^3}{12 m^2} M_2
 \end{aligned}$$

Perciò, per avere $|E_{T,c}^{(m)}| < \epsilon$ basta determinare m in modo che sia

$$\boxed{\frac{(b-a)^3}{12 m^2} M_2 < \epsilon}$$

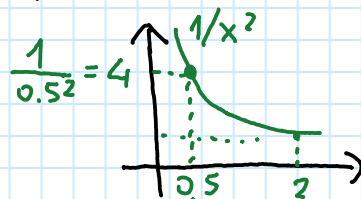
ESEMPIO Calcoliamo il numero di intervalli m necessario per avere

$$I = \int_{0.5}^2 f(x) dx$$

con un errore, in valore assoluto, $|E_{T,c}^{(m)}| < \epsilon = 10^{-6}$

Ho $a = 0.5$, $b = 2$, $f(x) = f(x)$ da cui

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \quad \text{Perciò}$$



$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = \max_{x \in [0.5, 2]} \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \max_{x \in [0.5, 2]} \frac{1}{x^2} = 4$$

Ne segue

$$\frac{(b-a)^3}{12 m^2} M_2 < \epsilon \Rightarrow \frac{(2-0.5)^3}{12 \cdot m^2} \cdot 4 < 10^{-6} \Rightarrow$$

$$m^2 > \frac{(1.5)^3 \cdot 4}{12 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow m \approx 1060,7$$

Servono 1061 intervalli. In realtà, potrebbero servire meno intervalli ma questo non lo posso sapere!

Vediamo un po' di conseguenze importanti delle formule dell'errore.

$$(1) \quad E_{T,c}^{(m)} = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi_m)$$

$$E_{T,c}^{(2m)} = -\frac{(b-a)^3}{12(2m)^2} f''(\xi_{2m})$$

Ne segue

$$\frac{E_{T,c}^{(m)}}{E_{T,c}^{(2m)}} = \frac{-\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi_m)}{-\frac{(b-a)^3}{12 \cdot 4m^2} f''(\xi_{2m})}$$

se $f''(x)$ è circa costante in $[a, b]$
 $\Rightarrow f''(\xi_m) \approx f''(\xi_{2m})$
 ≈ 4

Questo significa che raddoppiando il numero di intervalli l'errore si riduce, all'incirca, di 4 volte.

(2) Usando la (1) oppure vista possiamo scrivere

$$\begin{cases} I = I_{T,c}^{(m)} + E_{T,c}^{(m)} \\ I = I_{T,c}^{(2m)} + E_{T,c}^{(2m)} \\ E_{T,c}^{(m)} \approx 4 E_{T,c}^{(2m)} \end{cases}$$

E eliminando l'errore e ricavando I in funzione di

$I_{T,c}^{(m)}$ e $I_{T,c}^{(2m)}$:

$$I = I_{T,c}^{(m)} + 4 E_{T,c}^{(2m)}$$

$$4I = 4I_{T,c}^{(m)} + 4 E_{T,c}^{(2m)}$$

$$I \cong I_{T,C}^{(m)} + 4 E_{T,C}^{(2m)}$$

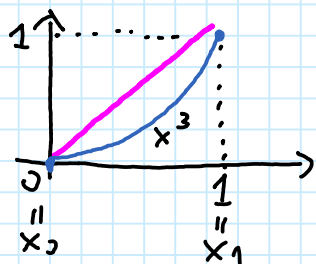
$$4I = 4I_{T,C}^{(2m)} + 4E_{T,C}^{(2m)}$$

$$3I \cong 4I_{T,C}^{(2m)} - I_{T,C}^{(m)}$$

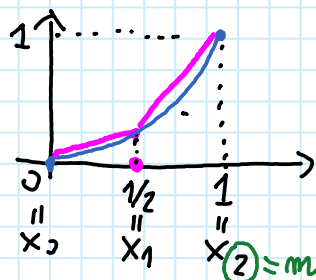
$$I \cong \frac{4I_{T,C}^{(2m)} - I_{T,C}^{(m)}}{3} \quad (\diamond)$$

Queste formule danno I esatto se $f''(x)$ è costante in $[a, b]$. Altrimenti danno una approssimazione $\hat{I}$ migliore di I e partono da $I_{T,C}^{(2m)}$ e $I_{T,C}^{(m)}$.

ESEMPIO Calcoliamo $I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ usando le formule dei trapezi composte con $m=1$ e con $m=2$ intervalli.



$$m=1 : I_{T,C}^{(1)} = I_T = \frac{1}{2}$$



$$m=2 : h = \frac{1}{2}$$

$$I_{T,C}^{(2)} = \frac{1/2}{2} \left(\overset{f(x_0)}{0^3} + 2 \cdot \overset{f(x_1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \overset{f(x_m)}{1^3} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{8} + 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{8} = \frac{5}{16}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) = \sum_{i=1}^1 f(x_i)$$

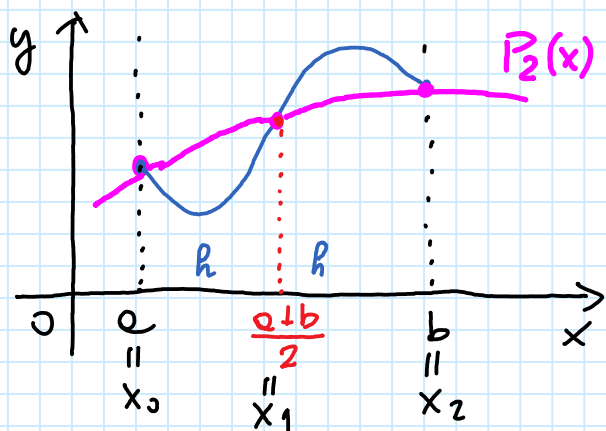
Applico $(\diamond)$ per migliorare la stima dell'integrale:

$$\hat{I} = \frac{4I_{T,C}^{(2)} - I_{T,C}^{(1)}}{3} = \frac{4 \cdot \frac{5}{16} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{4}}{3} = \frac{1}{4}$$

valore corretto. Osserviamo che

$$f'(x) = 3x^2 ; f''(x) = 6x \text{ che varia poco in } [0, 1].$$

FORMULA DI CAVALIERI - SIMPSON



Approssimiamo $f(x) \approx P_2(x)$, $x \in [a, b]$.
Allora la formula di integrazione è

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b [f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x)] dx =$$

$$= f(x_0) \cdot \int_a^b l_0(x) dx + f(x_1) \int_a^b l_1(x) dx + f(x_2) \int_a^b l_2(x) dx = I_{CS}$$

$\underbrace{\int_a^b l_0(x) dx}_{A_0^{(2)}} \quad \underbrace{\int_a^b l_1(x) dx}_{A_1^{(2)}} \quad \underbrace{\int_a^b l_2(x) dx}_{A_2^{(2)}}$

Calcolo $A_0^{(2)}$:

$$A_0^{(2)} = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \int_{\frac{a-a}{h}}^{\frac{b-a}{h}} \frac{(x_0+t h-x_1)(x_0+t h-x_2)}{(-h) \cdot (-2h)} \cdot h dt$$

$t = \frac{x-x_0}{h} \Rightarrow x = x_0 + t h$

$$= \int_0^2 \frac{(t h - h)(t h - 2h)}{2 h^2} h dt = \int_0^2 \frac{h(t-1)h(t-2)}{2 h^2} h dt$$

$$= \frac{h}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \frac{h}{2} \left[\frac{t^3}{3} - 3 \frac{t^2}{2} + 2t \right]_0^2 =$$

$$= \frac{h}{2} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \right) = \frac{h}{2} \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) = \frac{h}{2} \left(\frac{8}{3} - 2 \right)$$

$$= \frac{h}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{h}{3}.$$

Analogamente si trova $A_1^{(2)} = \frac{4}{3} h$. Ne segue

$$A_2^{(2)} = b-a - A_0^{(2)} - A_1^{(2)} = 2h - \frac{h}{3} - \frac{4}{3}h = \frac{h}{3}.$$

Quindi risulta

$$I_{CS} = \frac{h}{3} f(x_0) + \frac{4h}{3} f(x_1) + \frac{h}{3} f(x_2)$$
$$= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

CAVALIERI - SIMPSON

con $h = \frac{b-a}{2}$.