SUCCESSIONI

Def. Una successione a_n tende al numero reale l per n che tende all'infinito se per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists$ un numero n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ risulta $|a_n - l| < \varepsilon$.

Def. Una successione a_n tende a $+\infty$ [$-\infty$] se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste un numero n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ $a_n > M$ [$a_n < M$]

Esercizi: Calcolare i seguenti limiti:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-2}$; $\lim_{n\to+\infty} n^2+n$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2}$, $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-3}{n^2}$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{10^{2n}-10^n}{10^{2n}+10^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n-3^n}{4^n-2^n)}$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-3^n}{1+3^n}$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n-2^n}{e^n+2^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{2^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{(n^2)}}{n^3+1}$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}(n^3+n)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{(n+1)!}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n+2^n}{(n-1)!}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n^2-1}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{(n+1)^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\sin n}{n^2+n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}(\sin(n!))$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2\sin\frac{1}{n}}{n^2+1}$,

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{n^2+n}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$,

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n 2}{2n^2+\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$, $\lim_{n\to+\infty} \ln n - n^2$,

$\lim_{n\to+\infty} \sin n - n$, $\lim_{n\to+\infty} e^n - (-1)^n \ln n$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)^n}$

$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{2-e^{-n^2}}{1+e^{-n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3}+1$; $\lim_{n\to+\infty} n-\sqrt{2n-1}$; $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^3}-10n-1$

$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n \frac{\sin\frac{1}{n}}{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} n \lg\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\sin\frac{1}{n}\right)n$;

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2+1\right)^{\frac{1}{e^n}}$, $\lim_{n\to+\infty} \cos\pi n^2$,

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^3+1}\right)^{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{n}{2}}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-\cos x^n}{\sin x^n+n^3}$

Limiti di funzioni reali di variabile reale

Calcolare

$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 2^-} x\sqrt{4-x^2}$, $\lim_{x\to 2^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\sqrt{4-x^2}}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$,

$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{(x-1)^2}$, $\lim_{x\to \pi} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin^2 x}$, $\lim_{x\to 0} [\cos x]$, $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)x$,

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\sin^2 x}{x^2+\sin(x^2)}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2+\sin^2 x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 2x}{1-\cos x}$,

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\sin 4x}$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x-\cos x}{x}$,

$\lim_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1-x}}{x+x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(\alpha x)|}{|x|^\alpha}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to\pm\infty} x^2-x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x}-x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\cos x$; $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{tg} x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sin x}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{ctn} x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+\sqrt{x}}{1+3x^2}$,

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to\pi} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$, $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}-\sin^2\frac{1}{x}\right]$, $\lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$;

$\lim_{x\to x_0} \left|\frac{x-|x+1|}{x}\right|$, $x_0\in\mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} x\sin x$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin x-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 2x}{x}$,

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin x}$, $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2-\cos x}$,

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sin x+1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\lg x)}{\lg x}$, $\lim_{x\to+\infty} 2^x \sin\frac{1}{2^x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{\sin^2 x}$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\lg x$,

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctn} x}{x}$, $\lim_{x\to 0} (1+\lg x)^{\operatorname{ctn} x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\lg\cos^4 x}{e^{x^4\sin x}-1}$,

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2-e^{x^3}+x^5}{x^7}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1-\sin^2 x)}{(1-\cos x)^3}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x+1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3+\sqrt{x}+1}{x^3-\sqrt{x}+1}$,

$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-3x+1}{\sin x-\sin 2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{\sqrt{x-2}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x}\sin 2^{|x|}}{\operatorname{tg} x+1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ $(\alpha>0)$,

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\lg\sin x-\lg\cos x}$, $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1-x}-\sqrt{1-\alpha x}$, $\lim_{x\to 0} \left(1-\frac{1}{x^\alpha}\right)^x$ $(\alpha>0)$,

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$, $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x$, $\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\frac{\alpha}{x}\right)^x$ $(\alpha>0)$,

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}$, $\lim_{x\to\pi} (2-\cos 2x)^{\frac{1}{\sin x}}$

Continuità

1. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}} & x \in [0,1) \\ \lg(x+a) & x \in [1,2] \end{cases} \quad ?$$

2. Per quali valori dei parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a e^{x^3 + x^2} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ ax^3 + bx + c & x > 0 \end{cases} \quad ?$$

3. Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} + b & x \geq 0 \\ \operatorname{atn} \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

. Stessa domanda per

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - 1 & x < 0 \\ a \sin x + b x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

4. Prolungare per continuità le funzioni:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} & x < 0 \\ 2 \sin x & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{2 - x},$$

$$l(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{2 \sin 12x} \end{cases}, \quad m(x) = -\frac{1}{|x^2 - 1|}, \quad p(x) = x \sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}};$$

5. Prolungare, se possibile, per continuità le seguenti funzioni:

$$\frac{x}{\lg x}, \quad \sin(\operatorname{ctg} x), \quad \frac{1}{1 + e^{1/x}}, \quad \frac{x}{1 + e^{1/x}}, \quad \frac{1}{2 - 3^{1/x}}.$$