TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera
a.a. 2009/10
Lezione XXXV

La costruzione "conica" K
"cone construction"

$$H_q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q \geq 1 \end{cases}$$

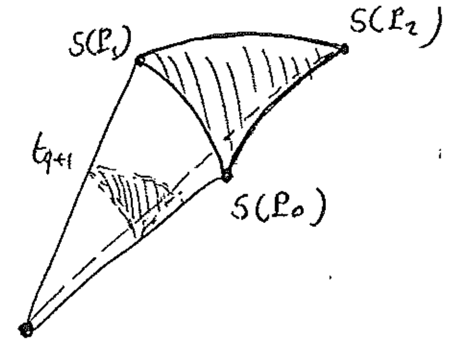
Lemma di Poincaré per l'omologia singolare

K è un operatore di omotopia

s = q-simplesso in $\mathbb{R}^n$ ($s: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$)

$$\boxed{Ks\left(\sum_{j=0}^{q+1} t_j P_j\right) = (1 - t_{q+1})\, s\left(\sum_{j=0}^{q} \frac{t_j}{1-t_{q+1}} P_j\right)}$$

"cono sopra s"; P_j: vertici; t_{q+1} ("tempo")



nota: non produce simplessi lisci, se s è liscio. ma si ha anche

$$H^{C^\infty}_q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=0 \\ 0 & q \geq 1 \end{cases}$$

Si trova: $\partial K - K\partial = (-1)^{q+1}$ $\quad q \geq 1$

(ex: $\quad q = 2$
$\partial K s = 0 - 1 + 2 - s$ (facce)
$K \partial s = 0 - 1 + 2$)

Pertanto, i cicli sono in realtà bordi $(p>0)$

c : p-ciclo $\qquad \partial c = 0 \quad \Rightarrow$

$p>0$

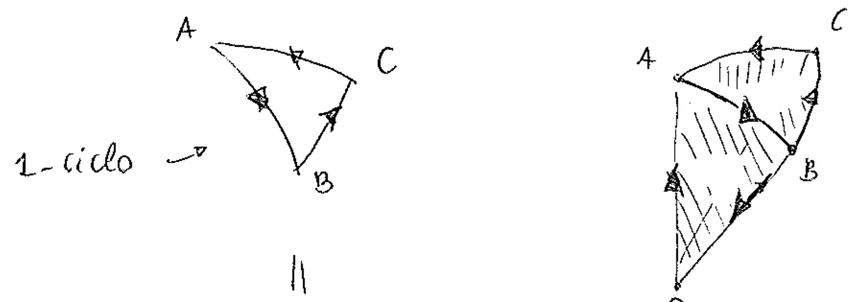
$$\partial K c - K \overset{\overset{0}{\|}}{\partial c} = (-1)^{p+1} c$$

$$\partial (K c) = (-1)^{p+1} c$$

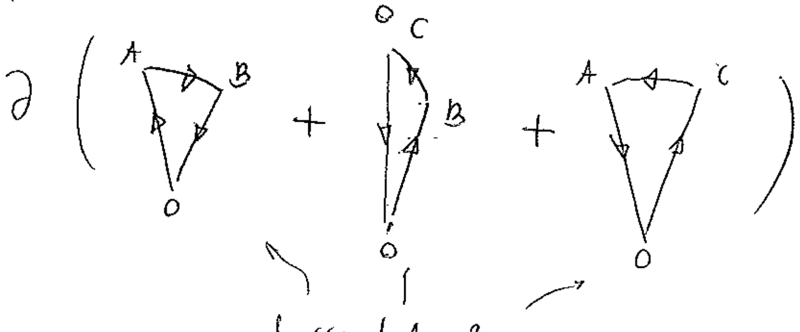
$$\partial \underbrace{(-1)^{p+1} K c} = c$$

es.

$\partial c = 0$



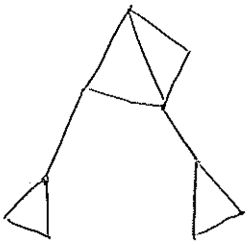
$\|$



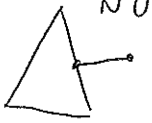
2-catena

|| Diamo di seguito maggiori dettagli, in ambiente simpliciale

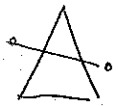
Sull' omologia simpliciale



Sì



NO



NO

simplessi propriamente uniti (properly joined)

$$\sigma^p \cap \sigma^m = \begin{cases} \emptyset \\ \text{faccia di } \sigma^p \text{ e } \sigma^m \end{cases}$$

☆ compresso geometrico (o complesso simpliciale) $\quad K = \bigcup_{\text{finita}} \sigma$

i σ sono propriamente uniti e ogni faccia di un σ è faccia di K $\qquad$ Dim K = più grande n tale che $\exists$ n-simplesso

$|K|$ = K con la topologia indotta dallo spazio ambiente.

sostegno geometrico del complesso (geometric carrier) o anche poliedro associato a K polyhedron

(spesso confonderemo $|K|$ e K)

Se $X \underset{\text{omeom}}{\approx} |K|$, si dice che X è triangolabile e $|K|$ ne è una triangolazione

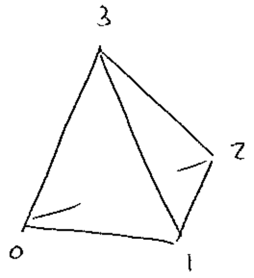
n-pseudovarietà: a) ogni simplesso di K è faccia di un n-simplesso
b) ogni $(n-1)$-simplesso è faccia di due (e solo 2) n-simplessi

c) Dati due n-simplessi, esiste una successione di n-simplessi che fa passare dall'uno all'altro tale che le intersezioni successive siano una $(n-1)$-faccia

Si può dare anche la nozione di n-pseudovarietà con bordo

(b) è sostituita da

(b') ogni $(n-1)$-simplesso è faccia di almeno uno e al massimo due n-simplessi

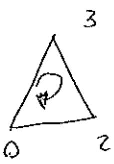


K : tetraedro "pieno" : 3-pseudovarietà con bordo

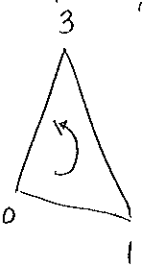
$$\langle a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \rangle$$

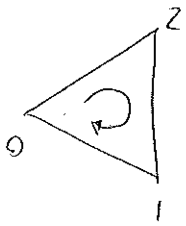
$$\partial \langle a_0, a_1\, a_2\, a_3 \rangle = \langle a_1\, a_2\, a_3 \rangle - \langle a_0\, a_2\, a_3 \rangle$$

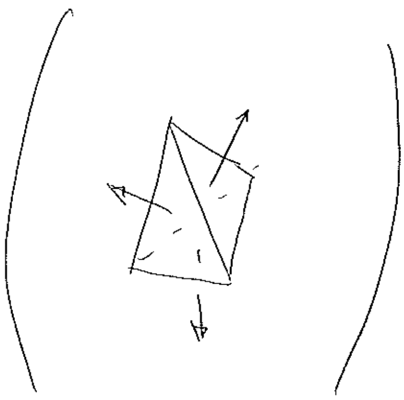
v. anche oltre

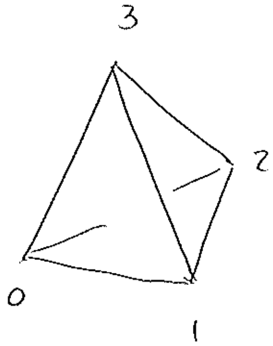


$$+ \langle a_0, a_1, a_3 \rangle - \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$$





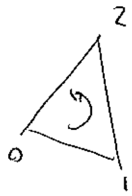


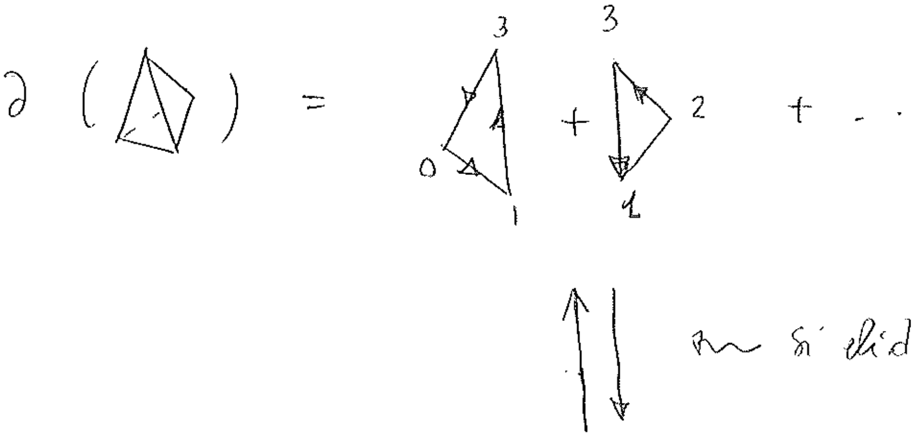


tetraedro "vuoto

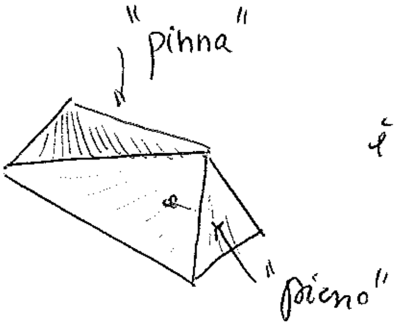
2-pvarietà

$$\partial \langle a_0 a_1 a_2 \rangle = \langle a_0 a_1 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle + \langle a_2 a_0 \rangle.$$





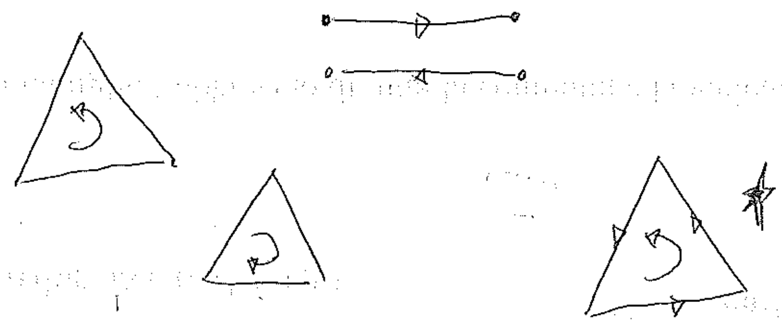
si elidono a due a due



è un complesso ma
non è una pseudovarietà

Orientamento di un simplesso : una scelta arbitraria dell'ordine dei vertici

dettagli

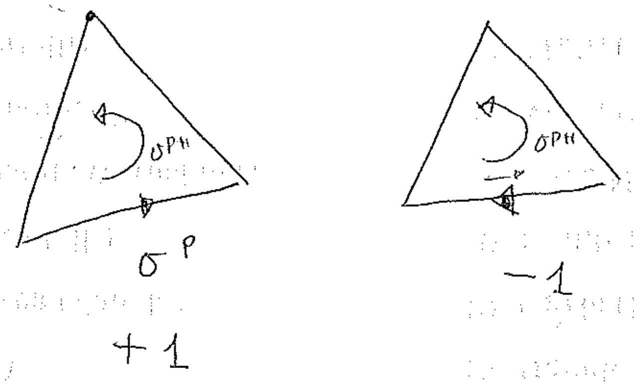


orientamento indotto da un p-simplesso sulle facce

[può differire da quello stabilito in precedenza su una singola faccia]

numeri di incidenza $\quad [\sigma^{p+1}, \sigma^{p}] = \begin{cases} 0 & \sigma^p \text{ non è faccia di } \sigma^{p+1} \\ \pm 1 & \end{cases}$

governano la combinatorica del complesso



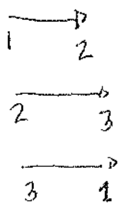
$$\eta(p) = (\eta_{ij}(p)) \qquad \eta_{ij}(p) = [\sigma_i^{p+1}, \sigma_j^{p}]$$

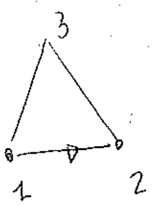
p-esima matrice di incidenza $\quad m_1 \times m_2$

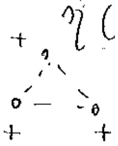
$\#$ p+1 simpl. $\quad \#$ p simpl.

Es:

$$\eta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$







$$\eta(0) = \begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lemma: $\sum_{\sigma^{p-1}} [\sigma^p, \sigma^{p-1}][\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0$ (☆)

$$\Downarrow$$

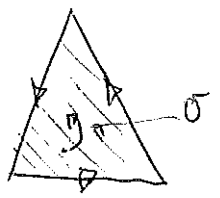
$$\partial \sigma^p = \sum_i [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] \, \sigma_i^{p-1}$$

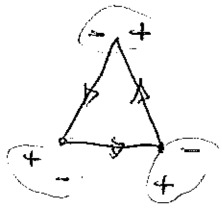
$c = \sum g_i \sigma_i^p$ $\qquad \partial c = \sum g_i \, \partial \sigma_i^p$

p-catena simpliciale

da (☆) si ha subito $\partial^2 = 0$

e resta definita in modo naturale l'omologia simpliciale

Es: 

$\partial\sigma =$ 

$\partial\partial\sigma = 0$

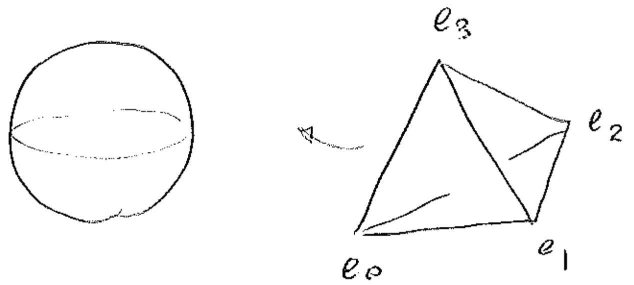
Lavoriamo in ambito simpliciale, in ogni caso $H^*_{sing} \cong H^*_{simp}$

☆ Omologia della sfera S^2

$H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ $(\mathbb{R})$

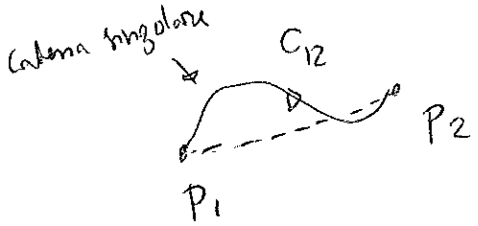
$H_1(S^2) \cong 0$

$H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$



$\boxed{H_0}$ 0-catene $c = \sum c_p \cdot p$ ← punti Somma formale finita.

$\partial p = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial c = 0$

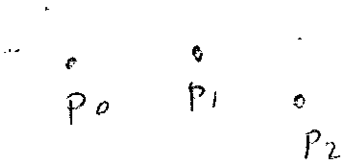


$p_1 \sim p_2 \qquad \partial p = 0$

$p_2 - p_1 = \partial c_{12}$

$\Rightarrow$ si vede subito che $H_0(S^2) = \langle p \rangle$ ↗ np $n \in \mathbb{Z}$ ↘ $r \cdot p$ $r \in \mathbb{R}$

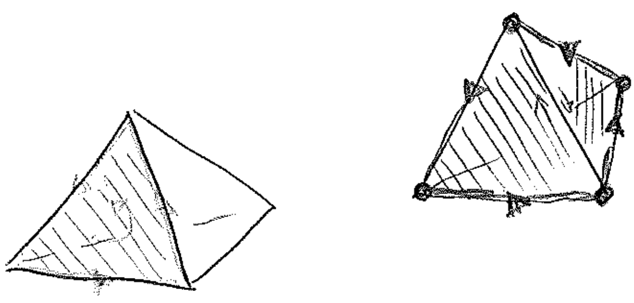
Notare $\sum c_i p_i \sim (\sum c_i) p_0$ (caso as.)



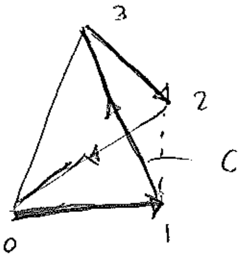
$p_1 \sim p_0 \Rightarrow c_1 p_1 \sim c_1 p_0$

$p_2 \sim p_0 \Rightarrow c_2 p_2 \sim c_2 p_0$

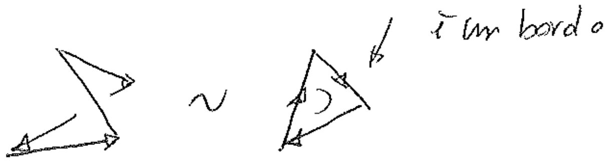
$\boxed{H_1}$ È subito visto che ogni 1-ciclo è bordo di una 2-catena:



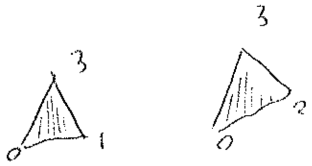
analiticamente. (altro es)



1° modo



$$c = \langle 0,1\rangle + \langle 1,3\rangle + \langle 3,2\rangle + \langle 2,0\rangle$$



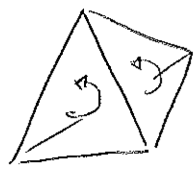
dico che $c = \partial c'$: $\quad c' = \langle 0,1,3\rangle - \langle 0,2,3\rangle$

$$\partial c' = \partial\langle 0,1,3\rangle - \partial\langle 0,2,3\rangle =$$

$$= \langle 1,3\rangle - \cancel{\langle 0,3\rangle} + \langle 0,1\rangle$$

$$\underbrace{-\langle 2,3\rangle}_{=\langle 3,2\rangle} + \cancel{\langle 0,3\rangle} \underbrace{-\langle 0,2\rangle}_{=\langle 2,0\rangle} = c \quad \checkmark$$

$\boxed{H_2}$



$c = \Sigma$  è un ciclo. Non è un bordo

$(\partial c = 0$: 

si cancellano a due a due

ogni 2-ciclo $c' \sim n c$ per qualche $n \in \mathbb{Z}$ $(\mathbb{R})$