

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

16 Giugno 2017

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	20	
problema 2	10	
totale	30	

1. (a) Si definisca la nozione di macchina a stati finiti nondeterministica progressiva.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per la definizione formale. Si noti che progressiva significa che l'evoluzione e' definita per ogni ingresso, cioe' la funzione di transizione e' definita come

$$Stati \times Ingressi \longrightarrow P(Stati \times Uscite) \setminus \emptyset$$

dove  $P$  rappresenta l'insieme potenza. La clausola " $\setminus \emptyset$ " impone che sia progressiva.

- (b) Si definisca la nozione di simulazione tra due macchine a stati finiti non-deterministiche.

Traccia di soluzione.

Si vedano le dispense per la definizione formale. Intuitivamente: ogni stato iniziale di  $M_1$  e' simulato da uno stato iniziale di  $M_2$ , e se uno stato  $p$  di  $M_1$  e' simulato da uno stato  $q$  di  $M_2$ , per ogni ingresso e per ogni stato futuro  $p'$  di  $p$  c'e' uno stato futuro  $q'$  di  $q$  tali che  $p'$  e  $q'$  producono la medesima uscita e  $p'$  e' simulato da  $q'$ .

- (c) Si enunci il teorema sulla relazione tra raffinamento e simulazione di una macchina a stati finiti nondeterministica da parte di una macchina a stati finiti deterministica.

Traccia di soluzione.

Se  $M_2$  e' deterministica,  $M_1$  e' simulata da  $M_2$  se e solo se  $M_1$  e' equivalente a  $M_2$  (e' equivalente se e solo se  $M_1$  raffina  $M_2$  e  $M_2$  raffina  $M_1$ ).

(d) Si considerino le due macchine a stati finiti seguenti:

Macchina  $M'$ :

- stati:  $s'_1, s'_2, s'_3$  con  $s'_1$  stato iniziale;
- transizione da  $s'_1$  a  $s'_3$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_3$  a  $s'_3$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $s'_1$  a  $s'_1$ :  $\bullet/\perp$ ,  
transizione da  $s'_1$  a  $s'_2$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s'_2$  a  $s'_2$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

Macchina  $M''$ :

- stati:  $s''_1, s''_2, s''_3$  con  $s''_1$  stato iniziale;
- transizione da  $s''_1$  a  $s''_3$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_3$  a  $s''_3$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $s''_1$  a  $s''_1$ :  $\bullet/0, \bullet/\perp$ ,  
transizione da  $s''_1$  a  $s''_2$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $s''_2$  a  $s''_2$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

Si risponda in ordine alle seguenti domande (si indichi sempre il numerale romano in ogni risposta):

- i. Si disegnino i diagrammi di transizione delle due macchine.
- ii. Si classifichino le macchine rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

$M'$  e' pseudo-nondeterministica.

$M''$  e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

- iii. Si trovi una simulazione di  $M'$  da parte di  $M''$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

$M''$  simula  $M'$  come mostrato dalla relazione

$$R_{M'-M''} = \{(s'_1, s''_1), (s'_2, s''_2), (s'_2, s''_1), (s'_3, s''_3), (s'_2, s''_3)\}.$$

Si noti che per simulare la transizione di  $M'$  da  $s'_1$  a  $s'_2$  sotto  $\bullet/0$  la macchina  $M''$  puo' scegliere la transizione da  $s''_1$  a  $s''_2$  oppure quella da  $s''_1$  a  $s''_1$ ; nel primo caso s'introduce nella relazione la coppia  $(s'_2, s''_2)$ , nel secondo caso s'introduce la coppia  $(s'_2, s''_1)$  e poi per conseguenza la coppia  $(s'_2, s''_3)$ . Si potrebbe scegliere una simulazione minima mettendoci nel primo o nel secondo caso, ma decidiamo d'inserire tutte e tre tali coppie per costruire una simulazione piu' grande.

- iv. Si trovi una simulazione di  $M''$  da parte di  $M'$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

$M'$  simula  $M''$  come mostrato dalla relazione

$$R_{M''-M'} = \{(s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_2'', s_2'), (s_3'', s_3'), (s_3'', s_2')\}.$$

Si noti che per simulare la transizione di  $M''$  da  $s_1''$  a  $s_1''$  sotto  $\bullet/0$  la macchina  $M'$  deve usare la transizione da  $s_1'$  a  $s_2'$  che introduce la coppia  $(s_1'', s_2')$  e per conseguenza la coppia  $(s_3'', s_2')$ .

- v. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine, se esiste.

Traccia di soluzione.

Una bisimulazione e' data dall'unione delle due precedenti relazioni, che e' simmetrica:  $R_{M'-M''} \cup R_{M''-M'} = \{(s_1', s_1''), (s_2', s_2''), (s_2', s_1''), (s_3', s_3''), (s_2', s_3''), (s_1'', s_1'), (s_1'', s_2'), (s_2'', s_2'), (s_3'', s_3'), (s_3'', s_2')\}.$

- vi. Si determinizzi la macchina  $M''$  e si mostri il diagramma di transizione della macchina deterministica cosi' trovata  $det(M'')$ .

Traccia di soluzione.

Macchina  $det(M'')$ :

- stati:  $\{s_1''\}, \{s_1'', s_2''\}, \{s_2'', s_3''\}, \{s_3''\}$  con  $\{s_1''\}$  stato iniziale;
- transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_1''\}$ :  $\bullet/\perp$ ,  
transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_1'', s_2''\}$ :  $\bullet/0$ ,  
transizione da  $\{s_1'', s_2''\}$  a  $\{s_1'', s_2''\}$ :  $\bullet/0, \bullet/\perp$ ,  
transizione da  $\{s_1''\}$  a  $\{s_3''\}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_3''\}$  a  $\{s_3''\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_1'', s_2''\}$  a  $\{s_2'', s_3''\}$ :  $\bullet/1$ ,  
transizione da  $\{s_2'', s_3''\}$  a  $\{s_2'', s_3''\}$ :  $\bullet/\perp, \bullet/0, \bullet/1$ .

- vii. Si trovi una simulazione di  $M'$  da parte di  $det(M'')$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

$det(M'')$  simula  $M'$  come mostrato dalla relazione

$$R_{M'-det(M'')} = \{(s_1', \{s_1''\}), (s_2', \{s_1'', s_2''\}), (s_2', \{s_2'', s_3''\}), (s_3', \{s_3''\})\}.$$

- viii. Si trovi una simulazione di  $det(M'')$  da parte di  $M'$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

$M'$  simula  $det(M'')$  come mostrato dalla relazione

$$R_{det(M'')-M'} = \{(\{s_1''\}, s_1'), (\{s_1'', s_2''\}, s_2'), (\{s_2'', s_3''\}, s_2'), (\{s_3''\}, s_3')\}.$$

- ix. Si trovi una bisimulazione tra le due macchine  $M'$  e  $det(M'')$ , se esiste.

Traccia di soluzione.

L'unione delle precedenti relazioni  $R_{M'-det(M'')} \cup R_{det(M'')-M'} =$

$\{(s'_1, \{s''_1\}), (s'_2, \{s''_1, s''_2\}), (s'_2, \{s''_2, s''_3\}), (s'_3, \{s''_3\}), (\{s''_1\}, s'_1), (\{s''_1, s''_2\}, s'_2), (\{s''_2, s''_3\}, s'_2), (\{s''_3\}, s'_3)\}$  e' simmetrica, quindi costituisce una bisimulazione tra  $M'$  e  $\det(M'')$ .

x. Si commentino i risultati precedenti.

Traccia di soluzione.

$M'$  e  $M''$  sono esempi di macchine a stati finiti minimizzate equivalenti ( $M'$  raffina  $M''$  e  $M''$  raffina  $M'$ ), e pure bisimili (date le ipotesi non era scontato che fossero anche bisimili, ma in questo esempio si da' il caso che lo siano). Si noti che minimizzando gli stati di  $M'$  e  $M''$  si ottiene in entrambi i casi una medesima macchina costituita da un solo stato con i tre auto-anelli per ogni coppia d'ingressi/uscite.

Determinizzando gli stati di  $M''$  si ottiene una macchina  $\det(M'')$  pseudo-nondeterministica equivalente a  $M''$ . Ne consegue che anche  $M'$  e  $\det(M'')$  sono bisimili, poiche' macchine pseudo-nondeterministiche sono equivalenti se e solo se sono bisimili.

Si noti che minimizzando gli stati di  $\det(M'')$  si ottiene una macchina a stati finiti isomorfa a  $M'$  (in  $\det(M'')$  gli stati  $\{s''_1, s''_2\}$  e  $\{s''_2, s''_3\}$  sono equivalenti).

2. Si consideri una palla che rimbalza. Al tempo  $t = 0$ , la palla e' fatta cadere da un'altezza di  $y(0) = H$  metri con  $\dot{y}(0) = 0$  metri/sec. Dopo cade liberamente seguendo la legge  $\ddot{y}(t) = -g$ , con  $g = 10m/sec^2$  costante di gravita'. A un tempo successivo  $t_1$ , la palla colpisce il suolo con una velocita'  $\dot{y}(t_1) < 0$  metri al secondo e si produce un evento discreto *rimbalzo*. La collisione e' inelastica e la palla rimbalza con velocita'  $\dot{y}(t) = -a\dot{y}(t_1)$ , con  $0 < a < 1$  costante. Poi la palla risale sino a una certa altezza e ricade di nuovo al suolo e cosi' ripetutamente.

- (a) Si modelli il sistema come un automa ibrido e lo si descriva formalmente secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni:  $\{l_1\}$ , dove  $l_1$  e' la locazione iniziale con condizioni iniziali  $y(0) := H, \dot{y}(0) := 0$ ;
- dinamica della locazione  $l_1$ :  $\ddot{y}(t) = -g$
- transizione da  $l_1$  a  $l_1$ :  $A/rimbalzo, \dot{y}(t) := -a\dot{y}(t)$ ,  
dove  $A = \{(y(t), \dot{y}(t)) \mid y(t) = 0\}$  (la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita  $e_u(t) \in \{rimbalzo, assente\}$ ,  
uscita  $y(t) \in Reali$ .

- (b) Si disegni un grafico qualitativo dell'insieme degli stati raggiungibili dalla posizione  $y(t)$  e dell'insieme degli stati raggiungibili dalla velocità  $\dot{y}(t)$  a partire dalle condizioni iniziali  $y(0) = H$  e  $\dot{y}(0) = 0$ .

Traccia di soluzione.

Integrando  $\ddot{y}(t) = -g$ , si ha  $\dot{y}(t) = -gt$  e

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau = H - 1/2gt^2$$

Perciò il primo istante  $t_1$  in cui la palla tocca il suolo è dato da  $y(t_1) = 0$ , cioè  $H - 1/2gt^2 = 0$ , da cui  $t_1 = \sqrt{2H/g}$ .

Da queste equazioni si possono disegnare i grafici di  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$ . Si noti che i segmenti che costituiscono  $\dot{y}(t)$  hanno massimo (positivo) e minimo (negativo) a due successivi tempi di rimbalzo e intersecano l'asse delle ascisse a un tempo intermedio tra due rimbalzi.