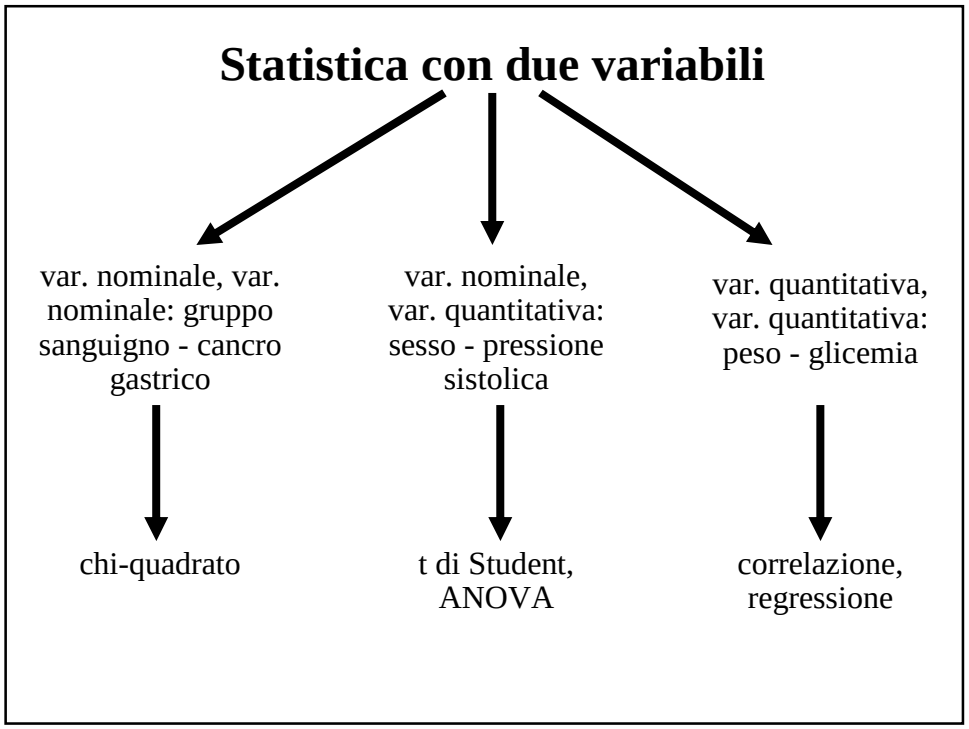
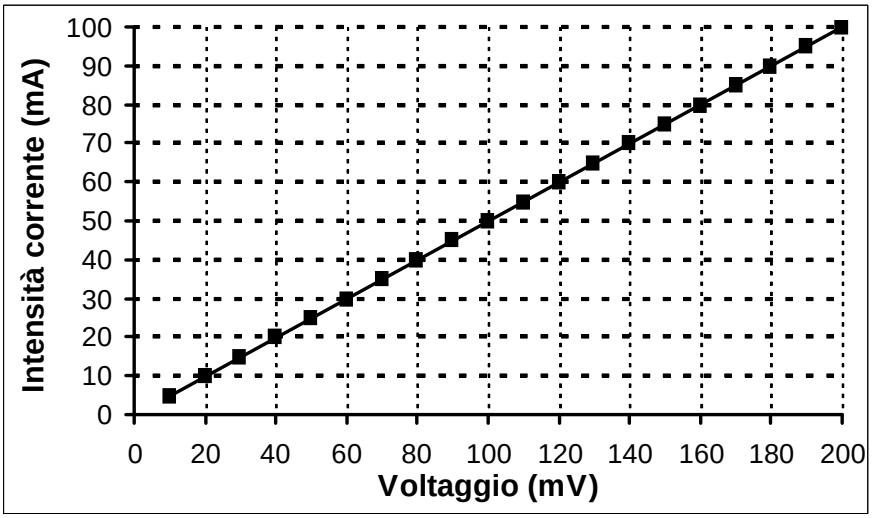
Regressione lineare semplice

- Prof. Giuseppe Verlato
- Sezione di Epidemiologia e Statistica Medica, Università di Verona

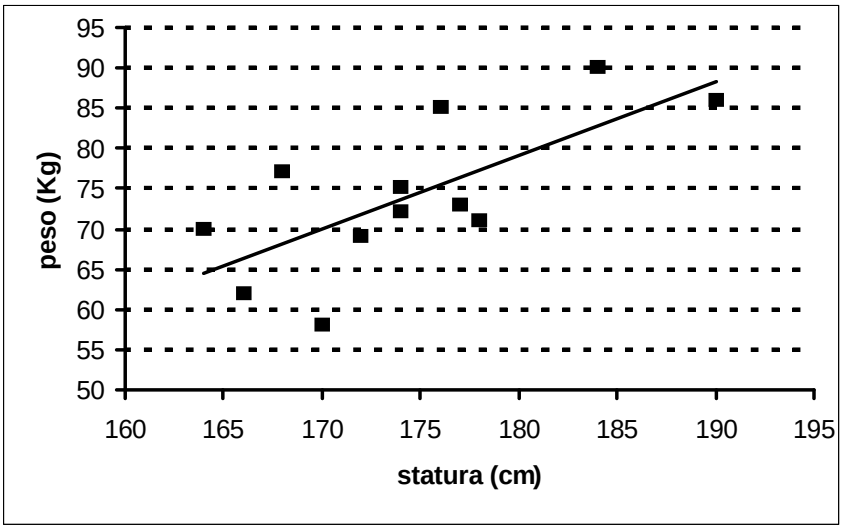


Correlazione perfetta tra variabile X (Differenza di potenziale V) e variabile Y (intensità della corrente: I legge di Ohm



Conduttanza = $\Delta I / \Delta V$

In medicina non esistono relazioni perfette, in quanto una variabile Y è influenzata non da una sola variabile X, ma da molte altre variabili, perlopiù ignote (variabilità biologica)

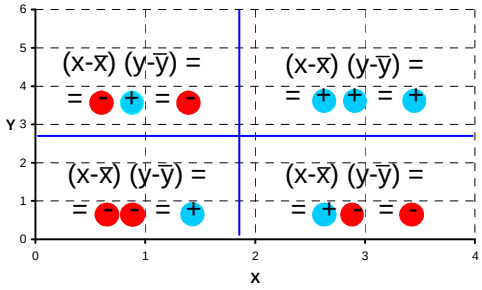


Misure di dispersione

Statistica univariata ⟶ devianza

Statistica bivariata ⟶ codevianza

	Formula euristica	Formula empirica	
Devianza	$\Sigma(x-\bar{x})^2$	$\Sigma x^2-(\Sigma x)^2/n$	sempre>=0
Codevianza	$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$\Sigma xy-(\Sigma x*\Sigma y)/n$	<0, =0, >0



Misure di dispersione

Statistica univariata ⟶ varianza = devianza / (n-**1**)

Statistica bivariata ⟶ covarianza = codevianza / (n-**2**)

$$\hat{COV}[X_1, X_2] = \frac{\Sigma (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{n - 2}$$

2 campioni casuali di dimensione *n*

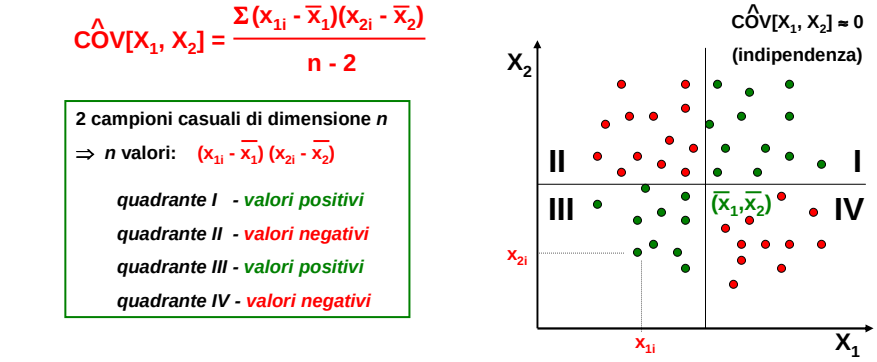
⇒ ***n* valori:** $(x_{1i} - \bar{x}_1)\,(x_{2i} - \bar{x}_2)$

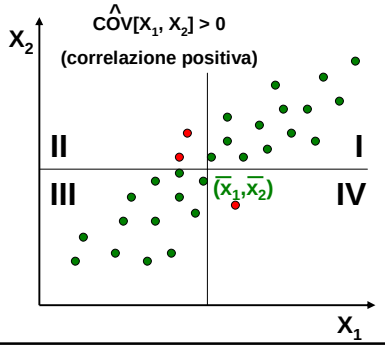
quadrante I* - *valori positivi

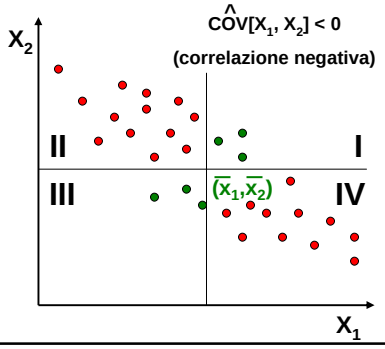
quadrante II* - *valori negativi

quadrante III* - *valori positivi

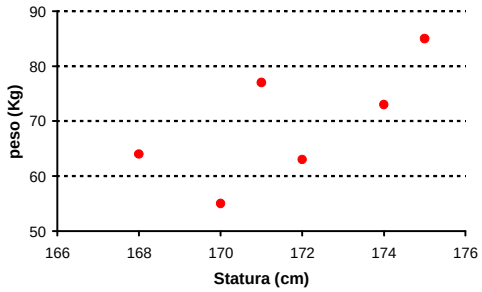
quadrante IV* - *valori negativi







	Statura (cm)	Peso (Kg)	xy	(x-x̄)	(y-ȳ)	(x-x̄) (y-ȳ)
	172	63	10836	0,3	-6,5	-2,17
	174	73	12702	2,3	3,5	8,17
	171	77	13167	-0,7	7,5	-5,00
	175	85	14875	3,3	15,5	51,67
	168	64	10752	-3,7	-5,5	20,17
	170	55	9350	-1,7	-14,5	24,17
Totale	1030	417	71682			97,00
MEDIA	171,7	69,5				



codevianza =

$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 97$

$\Sigma xy - (\Sigma x\, \Sigma y)/ n =$

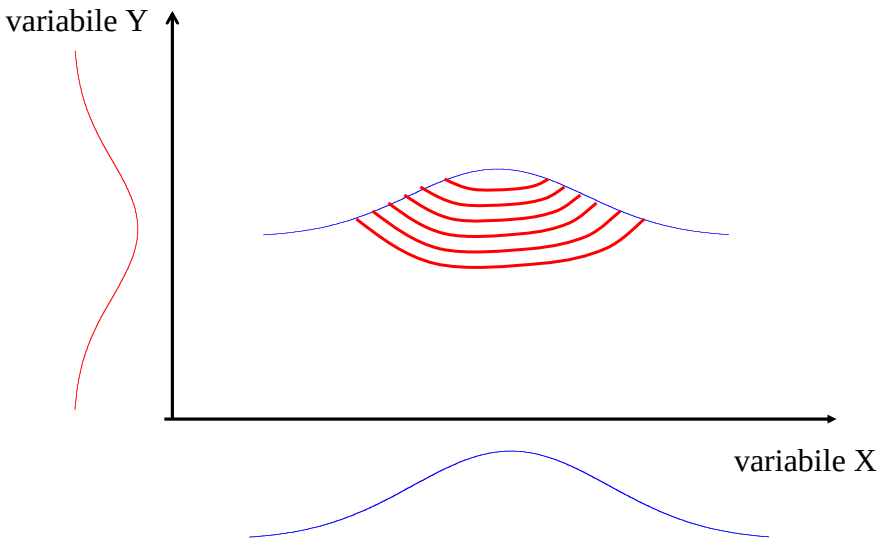
$71682 - 1030 * 417/6 =$

$71682 - 71585 = 97$

Regressione = relazione di tipo asimmetrico: una variabile casuale (Y) dipende da una variabile fissa (X)

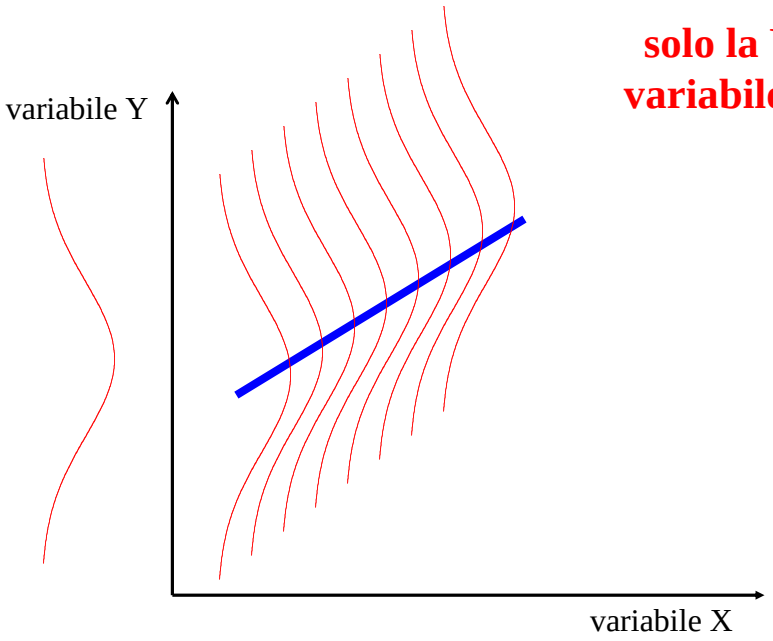
Correlazione = relazione di tipo simmetrico: le due variabili sono sullo stesso piano

Correlazione:
sia la X che la Y sono due variabili casuali



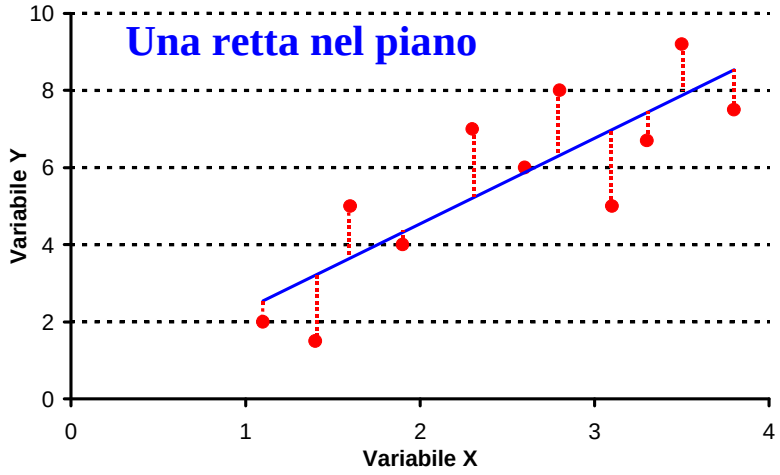
Modello di Regressione

solo la Y è una variabile casuale



Il modello di regressione lineare semplice - 1

$$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$$



Il modello di regressione lineare semplice - 2

Parte sistematica del modello

Variabile di risposta (dipendente, response variable)

$$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$$

Termine di errore

intercetta

coefficiente di regressione lineare

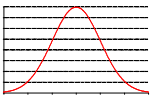
parametri ignoti del modello, stimati sulla base dei dati disponibili

Variabile esplicativa (predittiva, indipendente, explanatory)

Il modello di regressione lineare semplice - 3

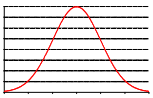
$$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$$

Variabile di risposta (dipendente)



Predittore lineare, parte deterministica del modello, senza variabilità casuale

Termine di errore, parte probabilistica



L'errore, e quindi la variabile di risposta, si distribuisce NORMALMENTE

Il modello di regressione lineare semplice - 4

Il peso (Y) dipende dalla statura (X_1)

$$E(y) = \beta_0 + \beta_1 x_1$$

E(y) = valore atteso (media) del peso degli individui che hanno quella determinata statura

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

y = peso di un determinato individuo, che dipende dalla statura, (parte sistematica del modello), ma anche da altre caratteristiche individuali (ε, parte probabilistica)

Il modello di regressione lineare semplice - 5

- **Modello teorico (ignoto)**

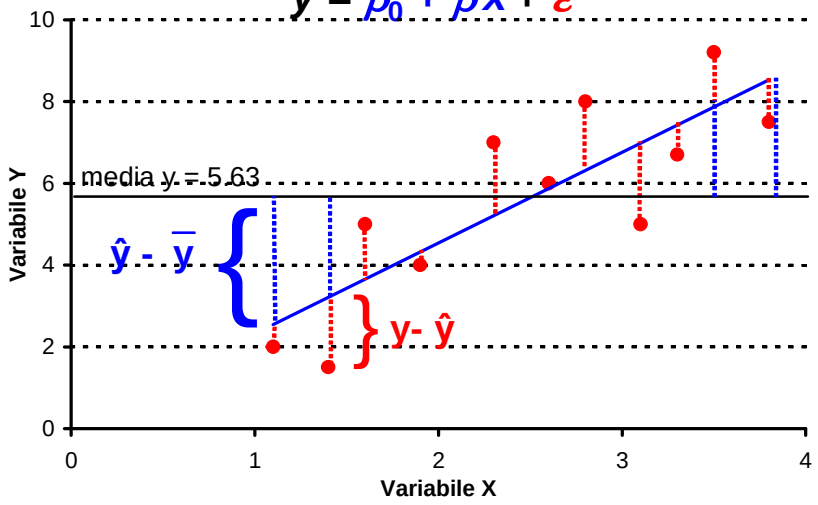
$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

- **Regressione Lineare stimata**

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

SCOMPOSIZIONE DELLA DEVIANZA nella Regressione lineare semplice - 1

$$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$$



$$(y - \bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y}) + (y - \hat{y})$$

SCOMPOSIZIONE DELLA DEVIANZA nella Regressione lineare semplice - 2

Variabilità totale — Variabilità residua

$$(y - \bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y}) + (y - \hat{y})$$

Variabilità spiegata dalla regressione

Si può dimostrare che:

Devianza totale, SST — Devianza residua, SSE

$$\Sigma(y - \bar{y})^2 = \Sigma(\hat{y} - \bar{y})^2 + \Sigma(y - \hat{y})^2$$

Devianza spiegata dalla regressione, SSR

Correlazione

Il coefficiente di correlazione (r) è un numero adimensionale, che varia tra -1 e +1

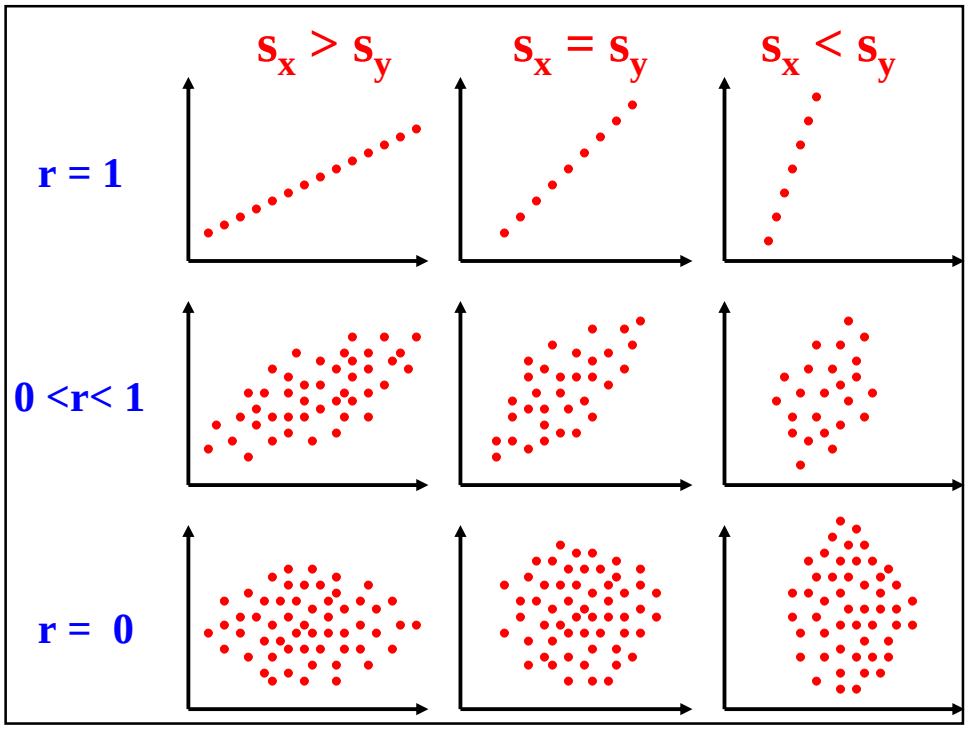
r = -1 i punti si allineano lungo una retta discendente

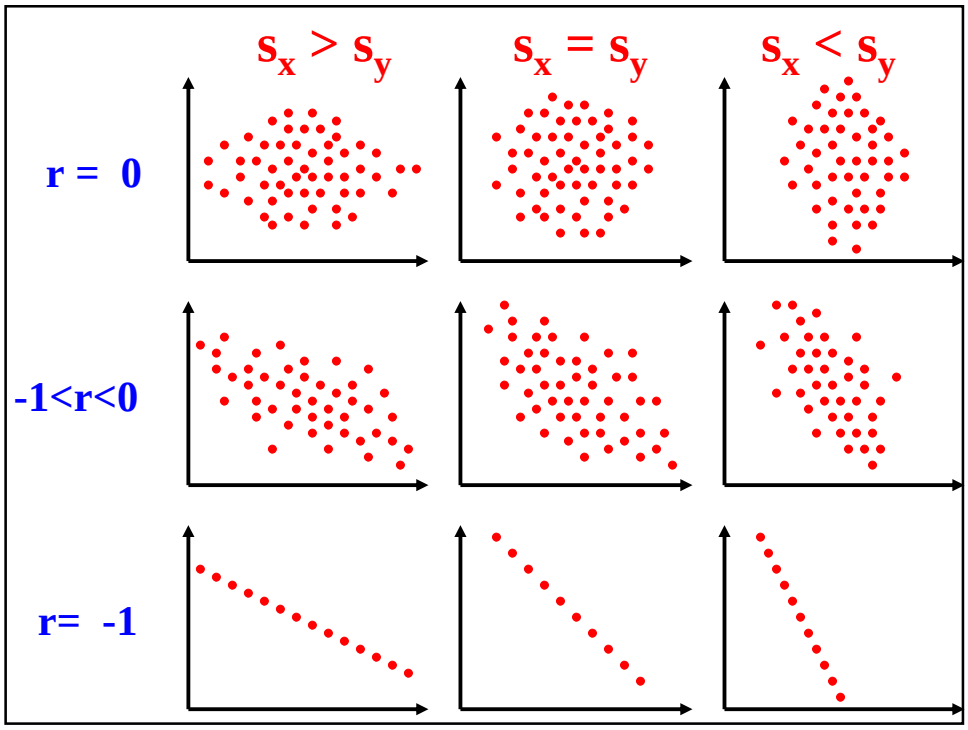
r = 0 i punti si dispongono a caso, senza mostrare un andamento crescente o decrescente

r = +1 i punti si allineano lungo una retta ascendente

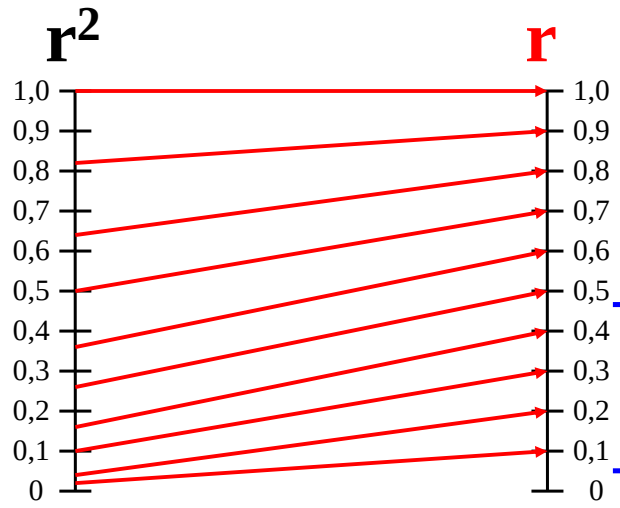
$$r = \frac{\text{codevianza}_{xy}}{\sqrt{\text{devianza}_x * \text{devianza}_y}}$$

$$r^2 = \frac{\text{Devianza spiegata dalla regressione, SSR}}{\text{Devianza totale, SST}} = \frac{\Sigma (\hat{y} - \bar{y})^2}{\Sigma (y - \bar{y})^2}$$





Nella realtà biologica la maggior parte delle correlazioni tra variabili è piuttosto debole: l'r^2 oscilla tra 0 e 0,5.



Il passaggio da r^2 a r, tramite estrazione della radice quadrata, consente di amplificare la scala nell'ambito dei valori bassi di r^2.

Regressione lineare semplice

Si cerca di trovare la retta che meglio interpola, che meglio si adatta alla nuvola di punti.

METODO DEI MINIMI QUADRATI

Si sceglie la retta che riduce al minimo la devianza residua, SSE, $\Sigma(y - \hat{y})^2$

Regressione lineare semplice

b_1 = coefficiente di regressione lineare, pendenza, slope

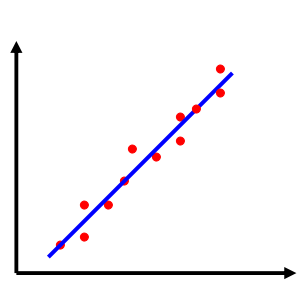
$$b_1 = \frac{\text{codevianza}_{xy}}{\text{devianza}_x}$$

b_1 varia tra $-\infty$ e $+\infty$, ha come unità di misura il rapporto tra l'unità di misura della variabile Y e l'unità di misura della variabile X

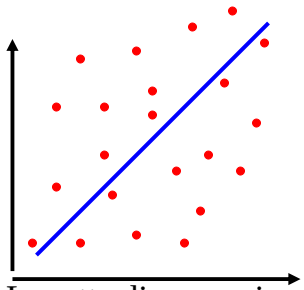
il valore assoluto di b_1 dipende dalla unità di misura utilizzate

b_0 = intercetta

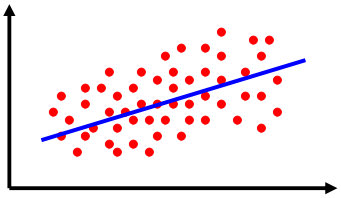
$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$$



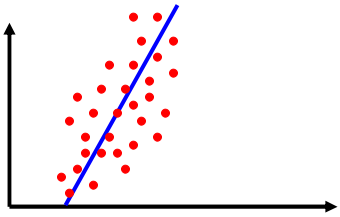
La retta di regressione approssima bene i dati.
devianza spiegata >dev.residua



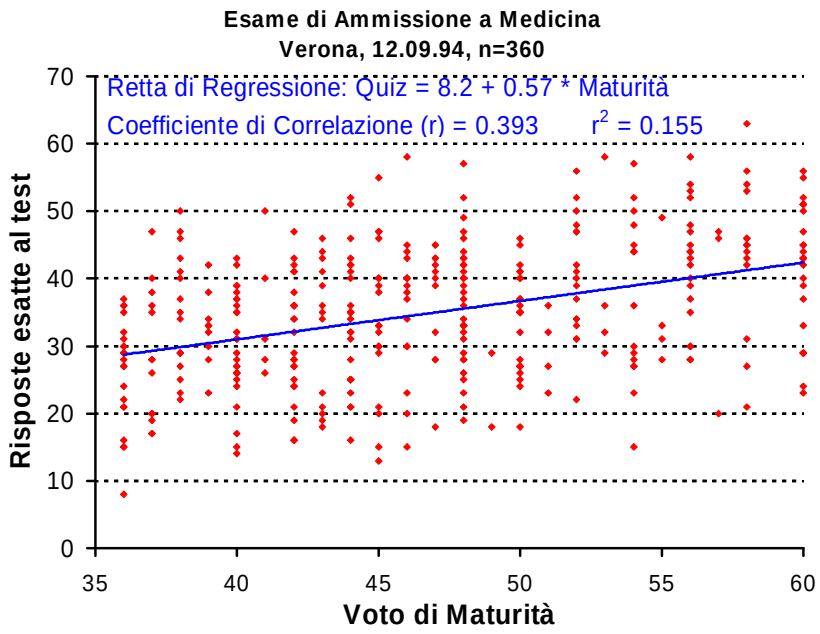
La retta di regressione approssima male i dati.
devianza spiegata <dev.residua

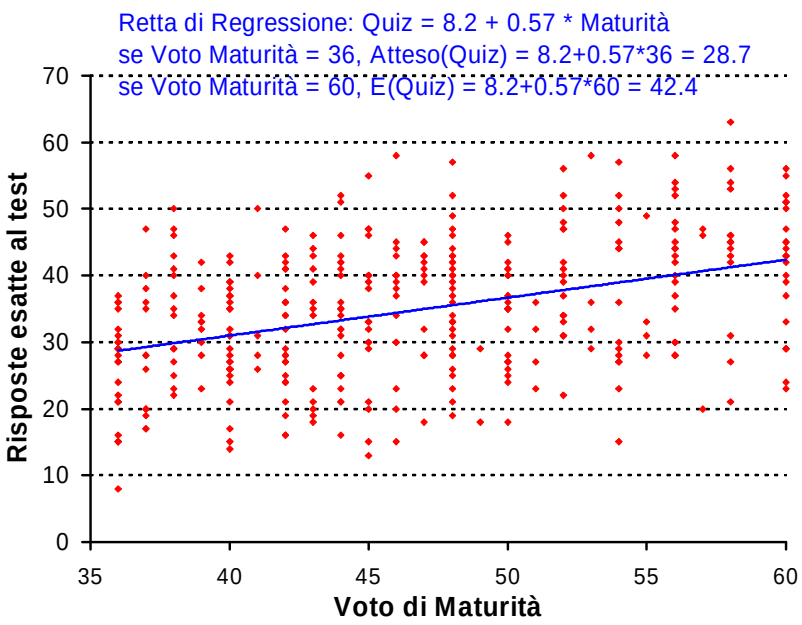


b prossimo a zero



b elevato





Correlazione

Coefficiente di Correlazione (r) = 0.393

$r^2 = 0.155$

$$r^2 = \frac{\text{Devianza spiegata dalla regressione, SSR}}{\text{Devianza totale, SST}} = \frac{\Sigma (\hat{y} - \bar{y})^2}{\Sigma (y - \bar{y})^2}$$

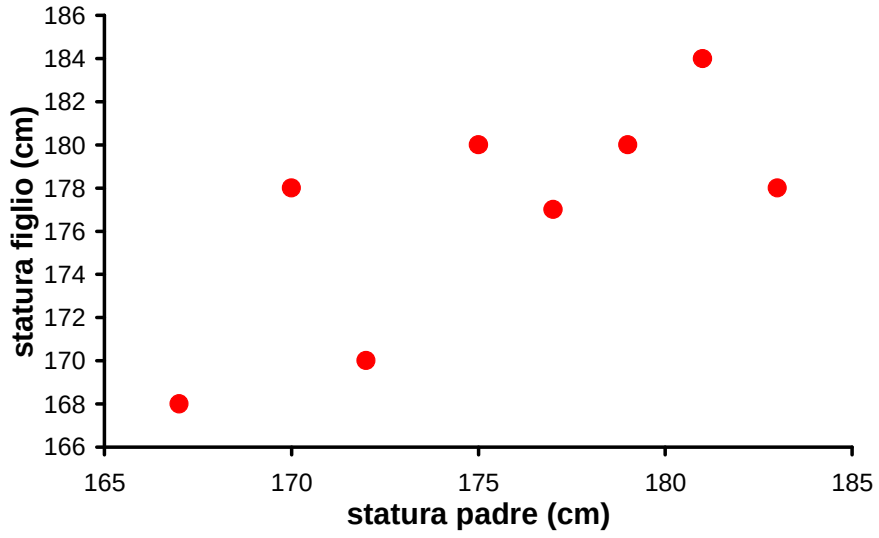
Il 15,5% della variabilità (devianza) del punteggio al test è spiegato dalla variabilità del voto di maturità.

ESEMPIO:

Esiste una relazione tra altezza dei padri e altezza dei figli maschi?
(A padri più bassi corrispondono figli più bassi?
A padri più alti corrispondono figli più alti?)

Padre	Figlio
167 cm	168 cm
175 cm	180 cm
183 cm	178 cm
170 cm	178 cm
181 cm	184 cm
172 cm	170 cm
177 cm	177 cm
179 cm	180 cm

I passo: rappresentazione grafica mediante diagramma di dispersione (scatterplot)



II passo: si ipotizza un modello statistico, che possa essere utile ad interpretare i dati

Ipotizziamo un modello lineare del tipo: $y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$

(*altezza figli*) $= \beta_0 + \beta$ (*altezza padri*) $+ \varepsilon$

(i figli di uno stesso padre hanno statura abbastanza simile, ma non necessariamente uguale, anche se ομοιομετρός, cioè figli della stessa madre)

III passo: Statistica descrittiva uni- e bi-variata

	Σx	Σx^2	n	Σxy	media
Statura padri	1404	246618	8	248483	175,5
Statura figli	1415	250477	8		176,875

	devianza	varianza	dev.standard
Statura padri	216	30,86	5,55
Statura figli	198,875	28,41	5,33

codevianza = $\Sigma xy - \Sigma x \, \Sigma y / n = 248483 - 1404*1415/8 = 150,5$

IV passo: Stima dei parametri del modello con il metodo dei minimi quadrati

$$b_1 = \frac{\textbf{codevianza}_{xy}}{\textbf{devianza}_x} = 150{,}5 / 216 = 0{,}697 \text{ cm/cm}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 176{,}875 - 0{,}697 * 175{,}5 = 54{,}59 \text{ cm}$$

Retta di regressione:

altezza figlio (cm)= 54,6 cm + 0,697 cm/cm *altezza padre (cm)

Quando la statura del padre cresce di 1 cm, la statura del figlio cresce in media di 7 mm.

V passo: Calcolo del coefficiente di correlazione

$$r = \frac{\textbf{codevianza}_{xy}}{\sqrt{\textbf{devianza}_x * \textbf{devianza}_y}} = \frac{\textbf{150,5}}{\sqrt{\textbf{216} * \textbf{198,9}}} = 0{,}726$$

$$r^2 = 0{,}7261^2 = 0{,}527$$

Il 52,7% della variabilità nella statura dei figli è spiegata dalla variabilità nell'altezza dei padri

VI passo: Inferenza sui parametri: i dati "supportano" il modello proposto?

Test t di Student, basato su b_1 (stima di β_1)

$\begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases}$ test a due code

Livello di significatività = 5%
Gradi di libertà = n - 2 = 8 - 2 = 6
Soglia critica = $t_{6,\ 0,025} = 2,447$

$$t = \frac{b-0}{ES_b} = \frac{b}{\sqrt{var_{res}/dev_x}} = \frac{0,697}{\sqrt{15,67 / 216}} = 2,588$$

$dev_{res} = dev_y - codev_{xy}^2/dev_x = 198,9 - 150,5^2/ 216 = 94,01$
$var_{res} = dev_{res} / (n-2) = 94,01 / 6 = 15,67$

VI passo: Inferenza sui parametri: i dati "supportano" il modello proposto?

Test t di Student, basato su r (stima di ρ)

$\begin{cases} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$ test a due code

Livello di significatività = 5%
Gradi di libertà = n - 2 = 8 - 2 = 6
Soglia critica = $t_{6,\ 0,025} = 2,447$

$$t = \frac{r-0}{ES_r} = \frac{r}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}} = \frac{0,726}{\sqrt{(1-0,527)/6}} = 2,587$$

| t osservato | > t tabulato
2,588 > 2,447

Rifiuto H_0

La relazione tra statura dei figli e statura dei padri non è dovuta al caso, ma è un fatto reale (P=0,041).

VII passo: Previsione sui valori della variabile Y

Per x = 185 cm, qual è il valore atteso di Y?

Retta di regressione:

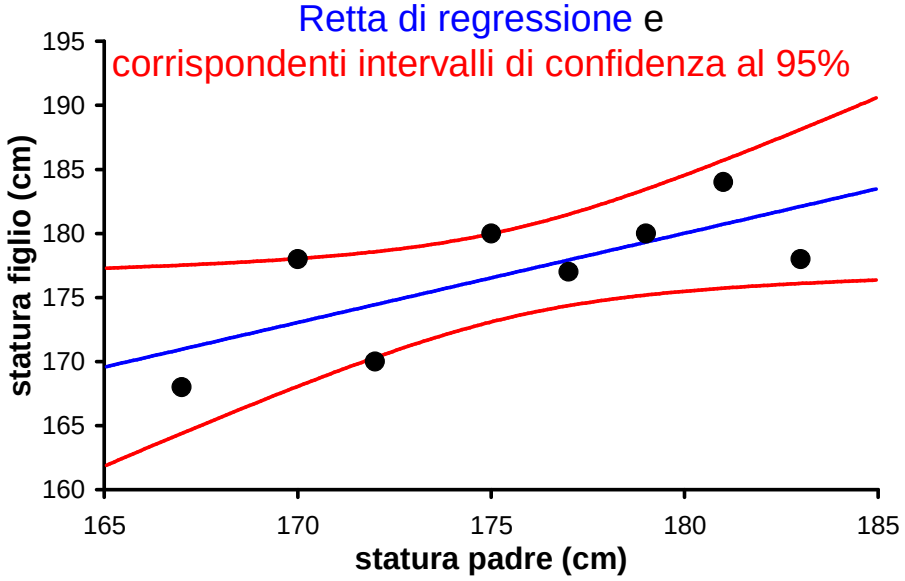
$\hat{y}$ = 54,6 cm + 0,697cm/cm *185 cm = 183,49 cm

$$ES_{\hat{y}} = \sqrt{var_{res}\,[1/n + (x-\bar{x})^2 / dev_x\,]} =$$

$$= \sqrt{15,67\,[1/8 + (185-175,5)^2 / 216\,]} = 2,916$$

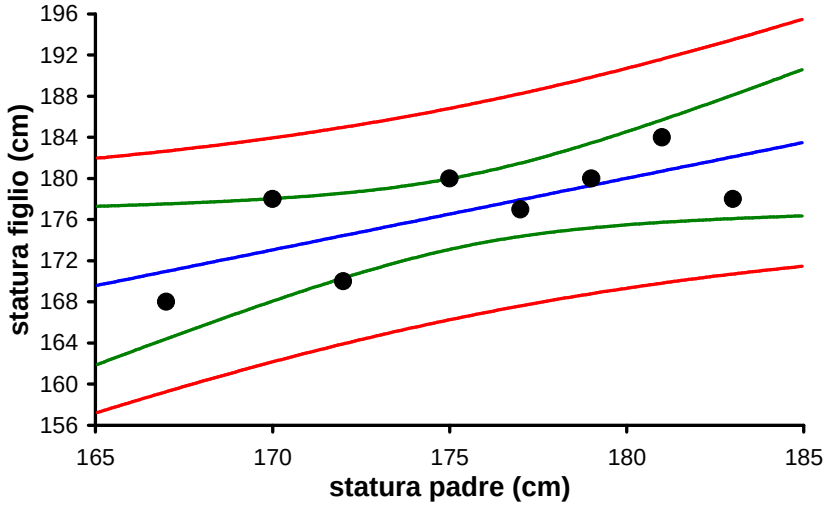
$$IC_{95\%} = \hat{y} \pm t_{\nu,\alpha/2} * ES_{\hat{y}} = 183,49 \pm 2,447 * 2,916 = \begin{bmatrix} 190,63 \\ 176,36 \end{bmatrix}$$

Retta di regressione e
corrispondenti intervalli di confidenza al 95%



L'incertezza delle stima della retta di regressione aumenta mano a mano che ci si allontana dalla media delle X (175,5 cm)

Retta di regressione,
corrispondenti intervalli di confidenza al 95%,
limiti al 95% della previsione di un singolo valore



L'incertezza legata alla previsione di un singolo valore è maggiore dell'incertezza legata alla stima del valore atteso

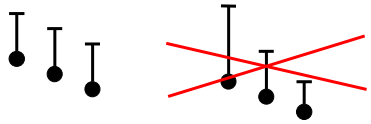
Regressione lineare semplice

$y = \beta_0 + \beta x + \varepsilon$

ASSUNZIONI

1) Il valore atteso degli errori E(ε) deve essere pari a ZERO

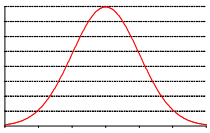
2) OMOSCEDASTICITA' (La varianza degli errori rimane costante)



3) INDIPENDENZA degli errori

se le provette tra un esame e l'altro non vengono lavate adeguatamente, una determinazione risente della determinazione precedente

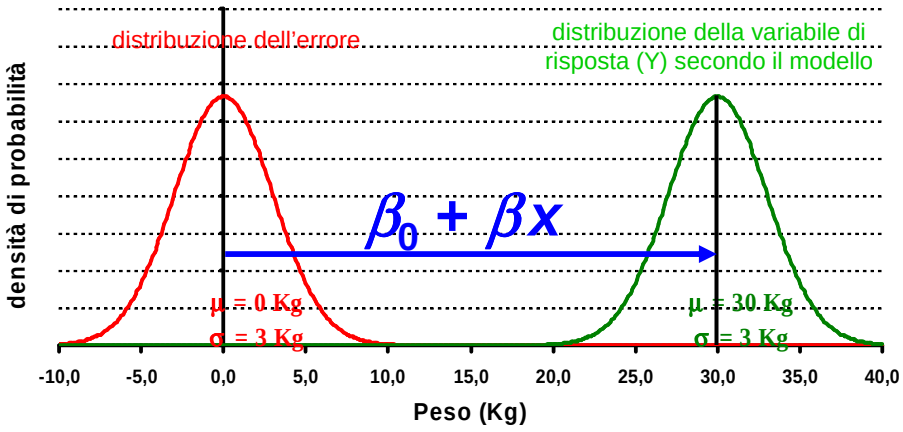
4) Distribuzione NORMALE degli errori

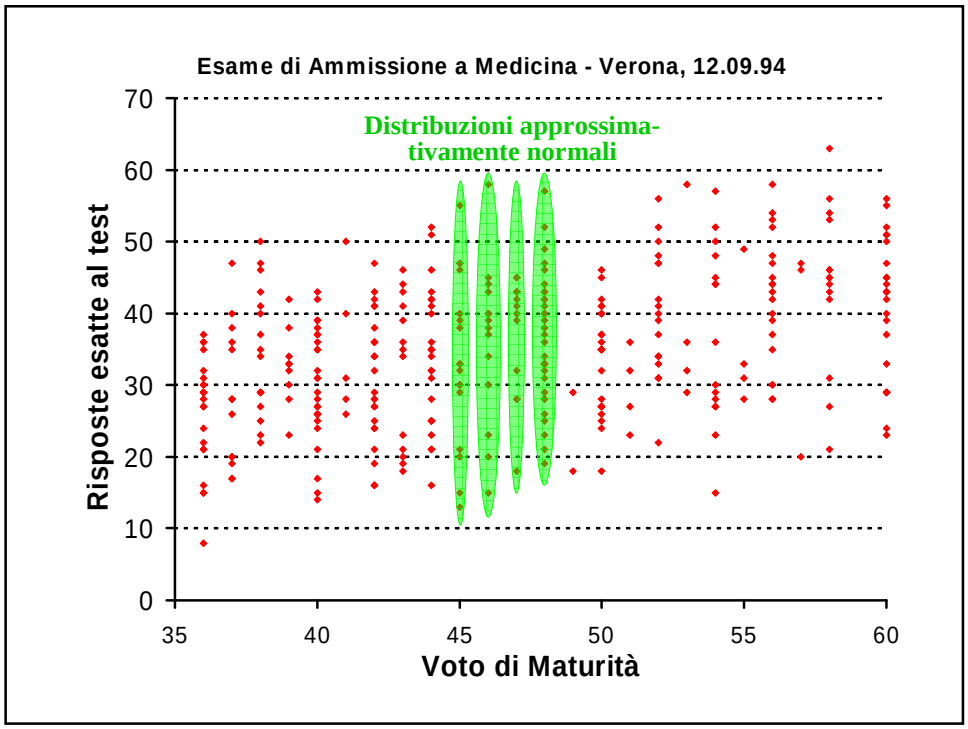


Regressione lineare semplice ASSUNZIONI

1) Il valore atteso degli errori E(ε) deve essere pari a ZERO

4) Gli errori si distribuiscono normalmente




Esame di Ammissione a Medicina - Verona, 12.09.94
Distribuzioni approssima-
tivamente normali
Risposte esatte al test
70
60
50
40
30
20
10
0
35
40
45
50
55
60
Voto di Maturità